

PRÁCTICA 5

Polinomio de Taylor - Extremos

1. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase C^2 :

a) $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$

b) $f(x, y, z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy \operatorname{sen}(z)$

c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln(z)$

2. Calcular todas las derivadas de tercer orden para las siguientes funciones:

a) $f(x, y, z) = xyz$

b) $f(x, y, z) = e^{xyz}$

c) $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y) - \operatorname{sen}(y^2z)$

d) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$

3. Probar que si f es $C^3(\mathbb{R}^3)$ entonces:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

¿Cuáles otras son iguales?

4. Sea $f(x, y) = \cos(xy)$. Además, x e y son funciones de las variables u y v de acuerdo a las siguientes fórmulas: $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = u - v$. Calcular

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(x(u, v), y(u, v)) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3}{\partial u \partial y^2} f(x(u, v), y(u, v))$$

a) Sustituyendo

b) Usando la regla de la cadena.

5. *Laplaciano - Función armónica*

Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación de Laplace o bien que es una función armónica en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla^2 f \equiv 0 \text{ en } U$$

Verificar que las siguientes funciones son armónicas en $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Determinar U en cada caso:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

b) $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

$$c) f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$d) f(x, y, z) = e^{3x+4} \cos(3z) + 4y$$

6. Sean $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(\|x\|)$. Demostrar que:

$$\Delta f(x) = \frac{d^2 g}{dt^2}(\|x\|) + \frac{2}{\|x\|} \frac{dg}{dt}(\|x\|)$$

7. Sean f, g dos funciones C^2 definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Probar que f y g son armónicas en U .

8. Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.

a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$

b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$

c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ en $(0, 0)$

d) $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$ en $(1, 0)$

e) $f(x, y) = \text{sen}(xy)$ en $(1, \pi)$

f) $f(x, y) = e^x \text{sen}(y)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$

g) $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ en $(2, 3)$

h) $f(x, y) = x + xy + 2y$ en $(1, 1)$

i) $f(x, y) = x^y$ en $(1, 2)$

j) $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ en $(2, 3, 4)$

9. Utilizando los resultados anteriores calcular $(0,95)^{2,01}$

a) con error menor que $1/200$

b) con error menor que $1/5000$

10. Sea $f(x, y) = xe^y$.

a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (1, 0)$.

b) Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0,98; 1,02)$. Estimar el error cometido.

11. Obtener la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para valores suficientemente pequeños de $|x|, |y|$.

12. a) Calcular el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $(1, 1)$ de la función $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

b) Usar la parte a) para evaluar $e^{\frac{4}{10}}$ usando que $\frac{4}{10} = (1 + \frac{1}{10})^2 - (1 - \frac{1}{10})^2$.

Comprobar que el error que cometió es menor que $0,3$

13. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$f(x, y) = \sin(x) \sin(y).$$

14. a) Calcular los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^4$ y de $g(x, y) = x^4 + y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.
 b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?
15. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:
 a) $f(x, y) = x^2 - y^2$
 b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$
 c) $f(x, y) = xy$
 d) $f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$
16. Sea $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Probar que:
 a) $(0, 0)$ es un punto de ensilladura.
 b) El determinante de la matriz $Hf(0, 0)$ es cero.
 c) f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ sobre cada recta que pase por $(0, 0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b .
17. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
 a) Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico pero no extremo.
 b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1, -1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?
18. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 no lineal tal que $Df(x_0) \neq 0$. Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:
- $$g(x) = f(x) - Df(x_0)(x)$$
- a) Demostrar que x_0 es un punto crítico de g .
 b) Probar que $Hf(x_0) = Hg(x_0)$.
 c) ¿Qué pasaría con $g(x) = f(x) - Df(x_0)(x - x_0)$?
19. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos, mínimos locales o puntos de ensilladura:
 a) $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$
 b) $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$
 c) $f(x, y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$
 d) $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$
 e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$
 f) $f(x, y) = (x - y)^2 + 1 + 2(x - y)$
 g) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
 h) $f(x, y, z) = xy + z^2$
 i) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$
 j) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$
 k) $f(x) = \frac{1}{1+||x||^2}, x \in \mathbb{R}^n$

20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(0, 1) = 0, \nabla f(0, 1) = (0, 2) \text{ y } Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $g(x, y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$

a) Calcular $Hg(0, 1)$

b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0, 1)$?

21. Decidir si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x, y) = e^{y^4 - x^2} + a(x - y) + b(x - 2)(y - 1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2, 1)$.