ANÁLISIS I – MATEMÁTICA 1 – ANÁLISIS 2 (COMPUTACIÓN)

PRÁCTICA 7

I. Repaso: integración en una variable

1. Calcular:

   a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx.$

   b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx.$

   c) El área entre las curvas $y = \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2\pi.$

2. Calcular:

   a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\, dx.$ b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx.$ c) $\displaystyle\int x e^{x^2}\, dx.$

   d) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\, dx.$ e) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x-2}\, dx.$ f) $\displaystyle\int \ln x\, dx.$

3. Hallar el área encerrada por las curvas:

   a) $y = x^3$ e $y = x.$

   b) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a esta curva en $x = -1.$

   c) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ y la recta $y = 12$ entre $x = 0$ y $x = 3.$

4. a) Calcular $\displaystyle\int_{-2}^{0} e^x\ dx.$

   b) Hallar el área encerrada por las curvas: $y = 0$, $y = -2$, $y = \ln x$ y $x = 0$. Sugerencia: Dibujar la región y usar a).

5. Calcular:

   a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 - 1\ dx$ b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x^2 - 1|\ dx$ c) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x^2 + 1|\ dx$

   d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \big||x-1| - |x|\big|\ dx$ e) $\displaystyle\int_{1}^{4} \sqrt{|x-3|}\ dx$ f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(|x|)\ dx$

II. Integrales impropias

6. *a*) Para todos los valores reales de $p > 0$, estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

$$\text{i. } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \text{ii. } \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \text{iii. } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

Observación: Dividir los valores de p de la siguiente manera:
$0 < p < 1,\ p = 1$ y $p > 1$.

b) Relacionar los resultados obtenidos con el hecho de que para $x > 0$, x^{-p} y $x^{-\frac{1}{p}}$ son funciones inversas y, por lo tanto, el gráfico de una es el de la otra reflejado respecto de la recta $y = x$.

7. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ \ln^2 x}$ *b*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *c*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ *e*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ *f*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ *h*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,dx$ *i*) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(1-x)^3}$

j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+\cos x}\,dx$ *k*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(2x)\,dx$ *l*) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x}{x^2-4}\,dx$

En los ítems *i*), *k*) y *l*) estudiar, además, el valor principal.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si f es continua y positiva tal que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

b) Si f es continua y positiva tal que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{-\infty} f(x)\,dx = -\infty$

c) Si f es continua y decreciente con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx = 3$, entonces el $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

d) Si f es una continua y positiva con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx = 8$, entonces el $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

e) Si f es continua y positiva con $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.

9. Para los distintos valores de $p \in \mathbb{R}$ analizar la convergencia de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)}.$$

10. Analizar la convergencia de la siguiente integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(x)+(x-1)^2}}\,dx$$

Sugerencia: Calcular los primeros términos del polinomio de Taylor de $\ln(x)$ en $x_0 = 1$.

11. Analizar la existencia de la siguiente integral impropia

$$\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{-x^3+3x^2-2x}}dx$$

12. Una aplicación: **Criterio integral de Cauchy para series numéricas.**

Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de términos no negativos y sea $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función decreciente tal que $f(n) = a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Probar que $\forall n > 1:\quad a_n \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq a_{n-1}$

b) Deducir que $S_n - a_1 \leq \displaystyle\int_1^n f(x)\,dx \ \leq S_{n-1}$

c) Probar, usando (b), que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty.$$

13. Estudiar la convergencia de la serie *p-armónica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad (p \in \mathbb{R}).$$

14. Probar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n^{\ln n}}$. (Sugerencia: usar una sustitución adecuada para reducir el problema a probar que la integral $\int_1^{\infty}(e/x)^x dx$ existe.)

15. *a*) Encontrar una función $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ no negativa tal que la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ converja aunque no la serie $\displaystyle\sum_1^{\infty} f(n)$. ¿Algún conflicto con el criterio de la integral?

b) Concluir que sin la hipótesis sobre el decrecimiento de la función el criterio de la integral no necesariamente resulta válido.

c) Mostrar que la función del ítem a) puede elegirse continua. (Sugerencia: Inspirarse en el gráfico.)

III. Integrales dobles

16. Evaluar cada una de las integrales siguientes si $R = [0,1] \times [0,1]$:

$a)$ $\int_R (x^3 + y^2)\, dxdy$ $\qquad$ $b)$ $\int_R ye^{xy}\, dxdy$

$c)$ $\int_R (xy)^2 \cos x^3\, dxdy$ $\qquad$ $d)$ $\int_R \ln[(x+1)(y+1)]\, dxdy$

$e)$ $\int_R (x^m y^n)\, dxdy,$ donde $m, n > 0$ $\qquad$ $f)$ $\int_R (ax + by + c)\, dxdy$

$g)$ $\int_R \operatorname{sen}(x+y)\, dxdy$ $\qquad$ $h)$ $\int_R (x^2 + 2xy + yx^{1/2})\, dxdy$

17. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$ y $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

18. Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Mostrar que si consideramos el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ entonces

$$\int_R [f(x)g(y)]\, dxdy = \int_a^b f(x)\, dx \int_c^d g(y)\, dy.$$

19. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = \operatorname{sen} y$, los planos $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \pi/2$ y el plano xy.

20. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0,1] \times [0,2]$ y los “lados verticales” de R.

21. Sean $F \in \mathcal{C}^2$ y $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$. Calcular $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dxdy$ en términos de F.

22. Graficar las regiones determinadas por los límites de integración de las siguientes integrales y calcular las integrales iteradas.

$a)$ $\int_0^1 \int_0^{x^2} dydx$ $\qquad$ $b)$ $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dydx$

$c)$ $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y)\, dydx$ $\qquad$ $d)$ $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dydx$

$e)$ $\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y)\, dxdy$ $\qquad$ $f)$ $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\, dydx$

$g)$ $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dydx$ $\qquad$ $h)$ $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \operatorname{sen} x\, dydx$

$i)$ $\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (x^n + y^m)\, dxdy$ $\quad (m, n > 0)$ $\qquad$ $j)$ $\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x\, dydx$

$k)$ $\int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} y} y\, dxdy$ $\qquad$ $l)$ $\int_{-2}^0 \int_{x^3}^{x+1} (y^2 + 1)\, dydx$

23. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y, & \text{si } x \text{ no es racional} \end{cases}$$

Mostrar que la integral iterada $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right] dx$ existe pero f no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

24. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r y el área de una elipse con semiejes de longitud a y b.

25. Calcular el área de:

    a) la región limitada por la recta $y = x$ y por la curva $y = x^2$.
    b) la región formada por todos los puntos (x,y) tales que $|x| + |y| \leq a,\ a \geq 0$.
    c) la región formada por todos los puntos (x,y) tales que $x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2,\ x^2 + y^2 \geq 1$.

26. Calcular

$$\int_T (x \operatorname{sen} x + y \operatorname{sen}(x+y))\,dxdy$$

siendo T el triángulo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$ y $(3,3)$.

27. Sea D la región acotada por los semiejes positivos de x e y y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular

$$\int_D (x^2 + y^2)\,dxdy$$

28. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular

$$\int_D x^3 y\,dxdy$$

29. Calcular el volumen de un cono de base de radio r y altura h.

30. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

    a) R: encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.
    b) R: encerrada por el cono de altura 4 dado por $z^2 = x^2 + y^2$.
    c) R: encerrada por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
    d) R: elipsoide con semiejes a,b y c.
    e) R: determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ y $z \geq 2$.

31. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, graficar las regiones correspondientes y evaluar la integral por los dos caminos.

    a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 xy\,dydx$

    b) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2\,dxdy$

    c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y\,dydx$

    d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2\,dxdy$

    e) $\displaystyle\int_{-3}^3 \int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2\,dxdy$

32. Calcular $\displaystyle\int_D y^2 x^{1/2}\, dxdy$ donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$$

33. Sea D la región limitada por las rectas $y = 2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ e $y = 1$. Calcular la siguiente integral

$$\iint_D x^2 y \; dA$$

34. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$ Calcular la siguiente integral

$$\iint_D \cos\left(\frac{x}{y}\right) \; dA$$

35. Calcular $\displaystyle\int_T e^{x-y}\, dxdy$ donde T es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$, y $(2, 2)$.

36. Sea T la región "triangular" limitada por las rectas $y = x$, $y = \sqrt{2}$ y la curva $y = \sqrt{x}$. Calcular

$$\iint_R e^{\frac{x}{y}} \; dA$$

37. Teniendo en cuenta que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s)\, ds$$

y

$$f'(s) = f'(0) + \int_0^s f''(t)\, dt$$

se tiene

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x \int_0^s f''(t)\, dtds$$

cambiar el orden de integración para demostrar que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x f''(t)(x - t)\, dt$$

Usando la misma idea demostrar la fórmula general:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x - t)^n}{n!}\, dt$$

IV. Integrales triples

38. Calcular:

    a) $\displaystyle\int_C (xyz + x^2y^2z^2)\,dV$, donde $C = [0,1]\times[-3,2]\times[-1,1]$.

    b) $\displaystyle\int_C (x\cos z + y\cos x + z\cos y)\,dV$, donde $C = [0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$.

39. Calcular el volumen de una esfera de radio r.

40. Calcular:

    a) $\displaystyle\int_W x\,dV$, donde W es la región limitada por, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, $z = x^2 + y^2$.

    b) $\displaystyle\int_W x^2\cos z\,dV$, donde W es la región limitada por, $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$.

    c) $\displaystyle\int_W dV$, donde W es la región limitada por, $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$.

    d) $\displaystyle\int_W (x + y + z)\,dV$, donde $W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \le 1\}$.

    e) $\displaystyle\int_W (x^3 + y + z)\,dV$, donde $W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\in[0,1], x^2 + y^2 \le 1\}$.

41. Calcular $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2x}\int_{x+y}^{x^2+y^2} dzdydx$ y graficar la región de integración.

42. Cambiar el orden de integración en

    $$\int_0^1\int_0^x\int_0^y f(x,y,z)\,dzdydx$$

    para obtener otras cinco formas de realizar la misma integración. Graficar la región de integración.

43. Sea $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \le 1\}$. Demostrar que si f es una función continua en B, impar respecto de z (es decir $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$), entonces $\int_B f(x,y,z)\,dV = 0$. ¿Para que otras regiones vale este resultado? (dar ejemplos).

44. Sea W la región determinada por las condiciones $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ y $0 \le z \le xy$.

    a) Hallar el volumen de W

    b) Calcular $\displaystyle\int_W x\,dxdydz$

    c) Calcular $\displaystyle\int_W y\,dxdydz$

    d) Calcular $\displaystyle\int_W z\,dxdydz$

    e) Calcular $\displaystyle\int_W xy\,dxdydz$

V. Aplicaciones de la integral múltiple

45. Hallar el promedio de $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$ sobre $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

46. Hallar el centro de masa de un triángulo con densidad constante.

47. Hallar el centro de masa de la región entre $y = x^2$ y $y = x$ si la densidad es $x + y$.

48. *a*) Hallar la masa de la caja $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \times [0, 2]$ suponiendo que la densidad es constante $(= \rho)$.

    b) Lo mismo que en la parte (a) pero suponiendo ahora que la densidad está dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z + 1$.

49. Hallar el centro de masa de la región acotada por $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

50. Una placa rectangular uniforme de acero, de lados a y b, gira alrededor de su centro de gravedad (que suponemos en $(0, 0)$) con velocidad angular constante ω.

    a) Analizar y justificar la fórmula para la energía cinética:

    $$E.C. = \int_R \rho \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)\, dxdy$$

    siendo R el rectángulo $[-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2]$ que describe la placa.

    b) Calcular la energía cinética en términos de ρ, ω, a y b.