Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Cuat II - 2009

Práctica 1: Preliminares

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

   a) $|x+3| < 1$ *b)* $|3x-1| < |x-1|$ *c)* $|x-3| \geq 1$

   d) $|x| > |x+3|$ *e)* $\left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right| \leq 1$

2. Representar los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$:

   a) $\{x : |x-1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$ *b)* $\{x : |x-3| < |2-x|\}$

   c) $\{x : 0 < x^2 \leq x^3\}$

3. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| + |x-9| > 2\}$;
   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : \big||x+2| - |x-1|\big| < 1\}$;
   (c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}$.

4. Sea $a \geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

   a) $|a+b| = |a| + |b|$ *b)* $|a+b| < |a| + |b|$

   c) $|a-b| = |a| + |b|$ *d)* $|a-b| < |a| + |b|$

   e) $\big||a| - |b|\big| = |a-b|$ *f)* $\big||a| - |b|\big| < |a-b|$

5. Sean a y b números reales. Decidir para qué valores de a y de b son válidas cada una de las siguientes afirmaciones

   a) $a < a^2$ *b)* $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

   c) $a > 0 \Rightarrow ab \geq b$. *d)* $a + b \geq \max\{a, b\}$

6. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

7. (a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:

   i. $\mathbb{R}_{>0}$;
   ii. $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$.

(b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente:
   i. $\mathbb{Z}$;
   ii. $\{x^{-1} : x < 0\}$;
   iii. $\mathrm{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

8. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos, calcularlos:

   a) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 20 < n \leq 35\}$ *b*) $A = \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

   c) $A = \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ *d*) $A = \{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$

9. (a) Probar que el número $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   (b) Considerar el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$. Calcule su supremo y concluya que A no tiene máximo.
   (c) Dado el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\} \subset \mathbb{R}$, calcule su ínfimo y concluya que B no tiene mínimo.

10. Calcular

   a) $\sup\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ *b*) $\sup\{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$

   c) $\inf\{\frac{n-3}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ *d*) $\inf\{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$

11. Dada la sucesión $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$:
   (a) Pruebe que es una sucesión monótona creciente.
   (b) Comprobar que está acotada inferiormente y calcule el mínimo.
   (c) Usando que $n! > 2^{n-1}$ para todo $n \geq 3$, compruebe que 3 es una cota superior de esta sucesión. Concluya que existe el límite, al que llamaremos e, que cumple $2 < e \leq 3$.

12. Considerar las siguientes sucesiones

$$x_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$
$$y_n = x_n + \frac{1}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{n!}$$

   (a) Verificar que $\{x_n\}$ es una sucesión creciente e $\{y_n\}$ es decreciente. Como además la diferencia $y_n - x_n \to 0$, concluir que existe $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n$ al que llamaremos e'.

(b) Comprobar que $e' = e$ (donde e es el del ejercicio anterior).

Sugerencia: por un lado es fácil verificar que $a_n < x_n$, de donde se obtiene que $e \leq e'$. Por otro lado, si para cada n fijo consideramos cualquier $m < n$, tenemos que

$$a_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

fijando el m y haciendo $n \to +\infty$ obtenemos

$$e = \lim_{n\to+\infty} a_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{m!} = x_m$$

se concluye tomando $m \to +\infty$.

(c) Probar que e es un número irracional.

Sugerencia: suponer que $e = \frac{p}{q}$ y por lo tanto para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n < \frac{p}{q} < y_n$, considere ahora el caso particular $n = q$ y multiplique toda la desigualdad por $q!$.

13. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo):

(a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ entonces $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.

(c) Si $a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 2$.

(d) Si $a_n < 2 - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge,entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 2$.

14. Calcular $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}$ y determinar, para cada $\varepsilon > 0$ de la siguiente tabla, un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $|\frac{n+1}{n} - \ell| < \varepsilon$ si $n > n_0$.

ε	$0,1$	$0,027$	$0,00001$	10^{-6}
n_0				

15. Dadas las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Probar que:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(b) $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

Sugerencia: Notar que a_n y b_n constan de $n+1$ términos. Use el principio de comparación.

16. Sea $a_n = \frac{4n-10}{n+1}$.
    (a) Encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que $3 < a_n < 5$.
    (b) Encontrar, si existen, $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

17. Probar que toda sucesión convergente es acotada.

18. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado y sea $s = \sup(A)$. Probar que existe una sucesión a_n contenida en A que converge a s. Probar el resultado análogo para el ínfimo de A.

19. Sea a_n una sucesión monótona acotada. Probar que a_n es convergente.

20. Considere la sucesión

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{Q},\ 0 < \alpha < 1 \text{ fijo} \\ a_{n+1} &= \frac{\alpha + a_n}{1 + a_n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Pruebe que la sucesión $\{a_n\}$ satisface:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Q}$ y $0 < a_n < 1$.
(b) Es monótona creciente, por lo tanto se puede asegurar que tiene límite.
(c) Calcule el límite de la sucesión dependiendo del valor de α. Concluya que dependiendo de α la sucesión $\{a_n\}$ puede converger a un número racional o a uno irracional (por ejemplo considere los casos $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{1}{4}$).

21. (Aproximación de la raíz cuadrada de $b > 0$) Dado un número $b > 0$ considerar la sucesión definida de la siguiente manera:

$$a_1 = a > 0 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right)$$

(a) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n > 0$, y por lo tanto la sucesión está acotada inferiormente.
(b) Probar que independientemente del valor inicial $a_1 = a > 0$ se tiene que para todo $n \geq 2$ vale que $a_n^2 \geq b$, y solo vale la igualdad si $a = \sqrt{b}$.
(c) La sucesión es decreciente para $n \geq 2$. Concluir que existe el límite de la sucesión.
(d) Probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{b}$.

(e) Pruebe usando inducción la siguiente estimación del error:

$$\forall n \geq 2, \quad 0 < a_n - \sqrt{b} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(a_2 - \sqrt{b}\right)$$

Use esta estimación para calcular cuantos elementos de esta sucesión se deben por lo menos calcular para obtener una aproximación de $\sqrt{5}$ con error menor a 10^{-6}, partiendo de $a_1 = 2$.

Métricas y topología en $\mathbb{R}^n$

22. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en $\mathbb{R}^2$. Representar las soluciones en el plano.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| > 2\}$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 3\}$

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 1| \geq 1\}$

g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} = 1\}$

h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} < 1\}$

23. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se define $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ y $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}$

(a) Mostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

i. $|x_i| \leq \|x\|_2$, si $i = 1, \ldots, n$;

ii. $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$;

iii. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$. Describir geométricamente esta doble desigualdad.

(b) Usando lo hecho, concluir que:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n}\ \|x\|_\infty < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < r\}.$$

(c) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostrar la equivalencia de los siguientes dos enunciados:

i. A es abierto;

ii. cualquiera sea $y \in A$, existe $r > 0$ tal que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_\infty < r\} \subseteq A.$$

24. (a) Mostrar que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos

i. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$;

ii. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$;

iii. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$.

(b) Dar un ejemplo de un conjunto en $\mathbb{R}^3$ que no sea ni abierto ni cerrado.

25. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, calcular ∂A, $\bar{A}$, $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$:

    (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
    (b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge z < 2\}$;
    (c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z+1)^2 < 1\}$;
    (d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 > 1/2\}$.

26. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son cerrados y acotados:

    (a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
    (b) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
    (c) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$;
    (d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;
    (e) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$.

27. En cada uno de los siguientes casos, encuentre una sucesión de puntos de A que no posea ninguna subsucesión convergente a un punto de A:

    (a) $A = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$;
    (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$.