Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Cuat II - 2009

Práctica 3: Diferenciación I

Derivadas parciales y direccionales

1. Sea f una función continua en $x = a$. Probar que f es derivable en $x = a$ si y solo si existe una única función afín $L(x) = m(x - a) + b$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - L(x)}{x - a} = 0.$$

   Calcule el valor de m y de b. Al gráfico de $L(x)$ se la denomina la **recta tangente** a $f(x)$ en $x = a$.

2. Para cada una de las siguientes funciones $f(x, y)$ calcular la derivada $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ $\quad v = (1, 0),\ (x_0, y_0) = (1, 2)$ $\quad$ y $\quad v = (0, 1),\ (x_0, y_0)$

   b) $f(x, y) = 2xy - 3x^2 + y - 5$ $\quad v = (1, 1),\ (x_0, y_0) = (2, 3)$ $\quad$ y $\quad v = (1, 2)\ (x_0, y_0) =$

   c) $f(x, y, z) = e^z(xy + z^2)$ $\quad v = (0, 1, 0),\ (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$

   d) $f(x, y) = (x + 1)\operatorname{sen} y - 2$ $\quad v = (1, 0),\ (x_0, y_0)$ cualquiera

   e) $f(x, y) = ||(x, y)||$ $\quad v = (a, b),\ (x_0, y_0) = (0, 0)$ $\quad$ con $||(a, b)|| \neq 0$

3. (a) Sea $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ y $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1)$.

   (b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$ para $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$

   (c) Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ para todo vector unitario v.

4. Calcular las funciones derivadas parciales de las siguientes funciones:

   a) $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$

   b) $f(x, y, z) = ye^x + z$

   c) $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen}^2(y)$

   d) $f(x, y) = \operatorname{sen} x$

   e) $f(x, y, z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1))$

   f) $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$

   g) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

5. Probar que la función $f(x, y) = |x| + |y|$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

6. Consideremos la siguiente función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   Probar que las únicas direcciones $v \in \mathbb{R}^2$ para las que existe la derivada direccional f_v en el origen son $v = (1,0)$ y $v = (0,1)$. Probar, además, que la función no es continua en el origen.

7. Consideremos la siguiente función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   Probar que f admite derivadas direccionales en el origen para todo vector unitario $v \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, f tampoco es continua en el origen.

8. Sea $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

   (a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$
   y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

   (b) Mostrar que f es continua en $(0,0)$.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

9. Graficar las curvas definidas por $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

   a) $\sigma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$

   b) $\sigma : [-1, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (1, 1, t)$

   c) $\sigma : [-1, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (1, 1, t^2)$

   d) $\sigma : [-3, 3] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (1, t^2, t)$

   e) $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = t(1, 1, 0) + (1 - t)(1, 0, 5)$.

10. Graficar las curvas definidas por $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$.

    (a) $\sigma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (t - \mathrm{sen}(t), 1 - \cos(t))$.

    (b) $\sigma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (\cos(2t), \mathrm{sen}(2t))$.

11. Calcular la derivada de σ en $t = t_0$. Encontrar la ecuación de las rectas tangentes a la curva imagen de σ en $\sigma(t_0)$.

    (a) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$, $\quad t_0 = 0$

    (b) $\sigma(t) = (\cos(2t), 3t - t^3, t)$, $\quad t_0 = 0$

    (c) $\sigma(t) = (\mathrm{sen}(3t), \cos(3t), 2t)$, $\quad t_0 = 1$

12. Hallar una parametrización $\sigma(t)$ de cada una de las curvas dadas en cada uno de los siguientes conjuntos

    (a) $\{(x, y)/y = e^x\}$

(b) $\{(x,y)/4x^2+y^2=1\}$

(c) $\{(x,y,z)/x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ z=x^2+y^2,\ z\neq 0\}$

Diferenciabilidad

13. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

(a) $f(x,y,z)=\sqrt{|xyz|}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases} x\mathrm{sen}\left(4\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{y}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si} \quad y\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y=0 \end{cases}$

14. Sea $f(x,y)=\begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Probar que en el origen f es continua, admite todas las derivadas direccionales, pero que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+f(0,0))}{||(x,y)||}\neq 0.$$

15. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en $a\in\mathbb{R}^n$, entonces existe la derivada direccional en cualquier dirección, y si $v\in\mathbb{R}^n$ es un vector unitario entonces vale la fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\nabla f(a)\cdot v$$

donde $\cdot$ denota el producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^n$.

16. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, $v=(a,b)$ y $\mathbb{L}:(x,y)=tv+(x_0,y_0)$. Supongamos además que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)$ Probar que una ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva definida por

$$\sigma(t)=(ta+x_0,tb+y_0,f(ta+x_0,tb+y_0))$$

en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ viene dada por

$$\mathbb{L}_1:(x,y,z)=t\left(a,b,\tfrac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)\right)+(x_0,y_0,f(x_0,y_0)).$$

17. Sea $f(x,y)=x^2-3xy+y^2$

(a) Encontrar ecuaciones paramétricas de las rectas tangentes a las siguientes curvas en $t_0 = 0$:

$$\sigma_1(t) = (t+1, 3, f(t+1, 3)) \quad \text{y} \quad \sigma_2(t) = (t+1, t+3, f(t+1, t+3)).$$

(b) Encontrar la ecuación de un plano $z = T(x, y)$ que contenga ambas rectas y mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x, y) - T(x, y)}{||(x, y) - (1, 3)||} = 0.$$

18. Sea $f(x, y)$ diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Probar que f es homogénea de grado 1 (es decir: $\forall t > 0$ y $\forall (x, y) \neq (0, 0)$: $f(t(x, y)) = tf(x, y)$) si y solo si

$$\nabla f(x, y) \cdot (x, y) = f(x, y) \quad , \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

19. Sea f diferenciable en $(1, 2)$ tal que $f(1, 2) = 3$, y sean además los vectores $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$. Se sabe que $\frac{\partial f}{\partial v_1}(1, 2) = 3$ y que $\frac{\partial f}{\partial v_2}(1, 2) = 4$.

(a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

(b) Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(1, 2, f(1, 2))$.

20. Estudiar la existencia de plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos indicados. Si existe, escribir su ecuación.

(a) $f(x, y) = xy + 1 - \text{sen}\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1, 5)$ y en $(2, 2)$.

(b) $f(x, y) = x^{1/4}y^{1/4}$ en $(0, 0)$ y en $(16, 1)$.

(c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ en (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.

(d) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$ y en $(1, 0)$.

(e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$ y en $(-1, 1)$.

(f) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3+x^2(y^2-6y+7)+(y-1)^2(6x+12-8y)}{x^2+2(y-1)^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 1) \\ 2 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 1) \end{cases}$ en $(0, 1)$.

21. Usando la expresión

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$$

para una función f adecuada, aproxime $(0,99e^{0,2})^8$.

22. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique la respuesta.

(a) Una función afín $f(x, y) = ax + by + c$ es diferenciable en todo punto.

(b) El plano tangente de la función $f(x, y) = x^2 - xy + y^3$ en el punto $(1, 1)$ contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, 1, -1)$$

(c) Si la función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $(2, -1)$ con plano tangente

$$z = 2x - 3y + 2$$

entonces la función $g(x, y) = 3x - 2f(x, y) + 5$ es diferenciable en el punto $(2, -1)$ con plano tangente

$$z = -x + 6y + 1$$

(d) El plano tangente de la función $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + y^3$ en el punto $(1, 2)$ contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(1, -1, 4)$$

(e) Si la función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $(0, 1)$ y el plano tangente en el punto $(0, 1)$ de la función $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $z = 0$ entonces la función

$$f(x, y)\ g(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

es diferenciable en el punto $(0, 1)$.

(f) Si la función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $(0, 0)$ entonces la función

$$g(x, y) = (x^2 + y^2)f(x, y)$$

es diferenciable en el punto $(0, 0)$ y su plano tangente es $z = 0$.

Interpretación geométrica del vector gradiente

23. Encuentre la dirección en que la función $z = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1, 1)$. ¿Cuál es la magnitud $||\nabla z||$ en esta dirección? Interpretar geométricamente esta magnitud.

24. Supongamos que la función $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición (x, y). Estamos parados en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano xy son iguales a $(1, 0)$ ¿En qué dirección deberíamos caminar para escalar más rápido?

25. (a) Mostrar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.

    (b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función

    $$f(x, y) = 10 + 6\cos(x)\cos(y) + 4\cos(3y)$$

    En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encontrar las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

26. Dada la función $f(x,y) = x^3 - xy^2 + y^4$, verificar cada una de las siguientes afirmaciones:

    (a) f crece en la dirección $(0,1)$ desde el punto $(1,1)$.

    (b) Desde el punto $(1,1)$ el mayor crecimiento de f se da en la dirección $(1,3)$.

    (c) Desde el punto $(1,1)$, f decrece si nos movemos en la dirección $(-1,0)$.

    (d) Desde el punto $(1,1)$ crece en la dirección $(0,1)$

Generalización a varias variables

27. Calcular el gradiente de f para

    $a)$ $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + z^2$, $b)$ $f(x,y,z) = xy + xz + yz$, $c)$ $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

28. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x,y) = (x+y, x-y, 2x+3y)$

    (a) Verificar que T es una transformación lineal y calcular su matriz asociada (en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).

    (b) Calcular la matriz de la diferencial $DT(a)$ para $a \in \mathbb{R}^2$. Verificar que es la misma matriz que la hallada en 1).

    (c) A continuación consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

        i. Supongamos que T verifica

        $$\lim_{v \to \overrightarrow{0}} \frac{||Tv||}{||v||} = 0,$$

        donde $\overrightarrow{0}$ denota el vector nulo de $\mathbb{R}^m$. Probar entonces que T es la transformación lineal nula, es decir, para cada $w \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $T(w) = \overrightarrow{0}$.

        ii. Asumiendo que T es diferenciable, deducir que para cada $a \in \mathbb{R}^n$ la diferencial $DT(a)$ es igual a T.

29. Para cada una de las siguientes funciones calcular $DF(a)$ para a en el dominio de F.

    (a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x,y)$

    (b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$

    (c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = (x + e^z + y, yx^2)$

    (d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x) = ||x||^2$