Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Cuat II - 2009

Práctica 4: Diferenciación II

Regla de la Cadena

1. Sean $f(u,v,w) = u^2 + v^3 + wu$ y $g(x,y) = x\text{sen}\,(y)$. Además, tenemos la siguiente dependencia respecto de t,

$$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \text{sen}\, t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \text{sen}\, t, y(t) = t,$$

donde t es una nueva variable. Bajo estas condiciones, calcular las derivadas respecto de t de las funciones

$$f\left(u(t), v(t), w(t)\right) \text{ y } g\left(x(t), y(t)\right),$$

en dos formas diferentes:

(a) usando la regla de la cadena
(b) sustituyendo

2. Sean $f(u,v) = e^{uv}\text{sen}\,(u^2+v^2), g(u,v,w) = \ln(u^2+v^2+w^2+1)$. Dadas

$$u(x,y) = x + y, \quad v(x,y) = xy, \quad w(x,y) = x - y + 1$$

calcular las derivadas parciales de las funciones

$$f\left(u(x,y), v(x,y)\right) \text{ y } g\left(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\right)$$

(a) usando la regla de la cadena
(b) sustituyendo

3. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $F(x,y) = G\left(f(x)g(y), f(x)h(y)\right)$ *b)* $F(x,y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$
c) $F(x,y) = G(x, G(x,y))$ *d)* $F(x,y) = f(x)^{g(y)} \quad (\text{si} f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R})$

4. a) ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}_{>0}$ es

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^p\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

diferenciable en $\mathbb{R}^2$?¿Para qué valores de p es f de clase C^1?

b) La función f se puede escribir como $g(x^2+y^2)$ con $g(t) = t^p \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$ si $t > 0$ y $g(0) = 0$. ¿Qué conclusiones se obtienen si se estudia la diferencibilidad de g?

5. (a) Coordenadas polares
Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$ y $g(r,\theta) = f(x,y)$.
Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

(b) Coordenadas esféricas
Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$, $z = r\cos(\phi)$ y sea
$$g(r,\theta,\phi) = f(x,y,z)$$
Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \phi}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

(c) Coordenadas cilíndricas
Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$ y $g(r,\theta,z) = f(x,y,z)$.
Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

Teorema del valor medio

6. Como una consecuencia del Teorema de Lagrange mostrar que son válidas las siguientes acotaciones

(a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x-y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $|1/x - 1/y| \leq |x-y|$, para $x, y > 1$.

(c) $|\arctan a - \arctan b| \leq \dfrac{1}{2}|a-b|$, para $a, b \geq 1$.

7. En este ejercicio vamos a dar una demostración del siguiente resultado:

Teorema del Valor Medio: Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre el abierto U. Sean P_1 y P_2 dos puntos cualesquiera de U tales que el segmento P_1P_2 (que une P_1 con P_2) está contenido en U. Entonces existe un punto P en el segmento P_1P_2 tal que
$$f(P_1) - f(P_2) = \nabla f(P) \cdot (P_1 - P_2),$$
donde $\cdot$ denota el producto escalar de vectores.

Notemos que este resultado es una generalización del Teorema de Lagrange al caso multidimensional.

(a) Encontrar una parametrización $\sigma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de la recta que une P_1 y P_2 tal que $\sigma(0) = P_1$ y $\sigma(1) = P_2$.

(b) Probar que existe c en el intervalo $(0,1)$ tal que $(f\circ\sigma)(1)-(f\circ\sigma)(0) = (f\circ\sigma)'(c)$.

(c) Deducir el Teorema del Valor Medio.

8. (a) Sea $f : B \to \mathbb{R}$ diferenciable, donde B es una bola en $\mathbb{R}^2$.

   i. Probar que si f es constante en B, entonces $\nabla f(a,b) = 0$, cualquiera sea $(a,b) \in B$.

   ii. Probar que si $\nabla f(a,b) = 0$ para cada $(a,b) \in B$, entonces f es constante en B. (*Sugerencia:* utilizar el Teorema de Valor Medio.)

   (b) Si $f, g : B \to \mathbb{R}$ son diferenciables, y verifican que $\nabla f(a,b) = \nabla g(a,b)$ para todo $(a,b) \in B$, probar que entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = g(x,y) + c.$$

Planos y rectas tangentes a superficies dadas de manera implícitas en $\mathbb{R}^3$

9. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1 centrada en el origen; es decir, S es la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Mostrar que el vector $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es normal a la superficie S en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e interpretar este hecho geométricamente.

10. Consideremos la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 = 1\}$. Probar que las rectas

$$\mathbb{L}_1 : t(0,1,1) + (1,0,0) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : t(0,1,-1) + (1,0,0)$$

son ortogonales y están contenidas en S. Usar esto para hallar la ecuación del plano tangente a S en $(1,0,0)$.

11. Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados

   (a) $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \qquad x_0 = (7,0,0)$

   (b) $xy - z\ln(y) + e^{xy} = 1 \qquad x_0 = (0,1,1)$

   (c) $xy \operatorname{sen}(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \qquad x_0 = (4,0,1)$

   (d) $\cos(x)\cos(y)e^z = 0 \qquad x_0 = (\pi/2,1,0)$

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en (x_0,y_0) y sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x,y,z) = f(x,y) - z$. ¿Qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de f en (x_0,y_0) y el plano tangente a una superficie de nivel de h en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$?

13. Encontrar los puntos $P = (x_0,y_0,z_0)$ de la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+2y^2+3z^2 = 21\}$$

en los que el plano tangente a S sea paralelo al plano $\Pi : x+4y+6z = 8$.

Teorema de la función implícita y el de la función inversa

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Probar que f es biyectiva y que la inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Encontrar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f^{-1} en el punto $(3, f^{-1}(3))$. ¿Cuánto vale $(f^{-1})'(a)$ para cada $a \in \mathbb{R}$?

15. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x,y) = (3x - 2y, 5x - 2y)$. Mostrar que T es biyectiva y hallar la expresión de la inversa T^{-1}. Calcular $DT^{-1}(a)$ para cada $a \in \mathbb{R}^2$.

16. Determinar si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase C^1 en a y calcular la diferencial de F^{-1} en el punto $F(a)$.

    (a) $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en $a = (x,y) \neq (0,0)$

    (b) $F(x,y) = (\operatorname{sen} x, \cos(xy))$ en $a = (\pi, \pi/2)$

17. Encontrar la solución $y = f(x,z)$ de $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ en un entorno de los siguientes puntos y escribir explícitamente esos entornos.

    (a) $(0,1,1)$

    (b) $(2,-2,2)$

18. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y) = (x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y, xy + y)$$

    (a) Demostrar que existe un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(1,1) \in U$, un entorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(-7,2) \in V$ y una inversa para F, $F^{-1} : V \to U$, C^1 tal que $F^{-1}(-7,2) = (1,1)$.

    (b) Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 5$ y $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calcular $\frac{\partial (goF^{-1})}{\partial v}(-7,2)$.

19. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$. Probar que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\det(DF(x,y)) \neq 0$ pero F no es inyectiva.

20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2$$

    (a) Demostrar que $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y,z)$ en el punto $(1,1,1)$.

    (b) Encontrar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1)$.

21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x,y) = (yx^{3/2} + (y+1)^2 - 6 \; , (\ln(x) + 5)y - 4)$$

(a) Probar que existe una inversa de f definida en un entorno del punto $p = (5,6) = f(1,2)$, diferenciable en p.

(b) Sean $v = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $w = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ vectores en $\mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $q = (1,2)$ tal que $\frac{\partial g}{\partial v}(1,2) = 4$ y $\frac{\partial g}{\partial w}(1,2) = 5$. Calcular $D(g \circ f^{-1})(5,6)$.

22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y,z) = x^2y + \ln(y)z - 1$$

(a) Probar que la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define implícitamente una función $y = \varphi(x,z)$ (diferenciable) en un entorno del punto $(x,z) = (1,2)$ tal que $f(x,\varphi(x,z),z) = 0$ para todo (x,z) en dicho entorno.

(b) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $Dg(2,-3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y que cumple que $g(2,-3) = (1,2)$. Sea $v = (\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}})$. Calcular $\frac{\partial(\varphi \circ g)}{\partial v}(2,-3)$.

23. Determinar las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones

(a) $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \qquad a = (2,0)$

(b) $g(x,y) = x^5 + y^2 + xy = 3 \qquad a = (1,1)$

(c) $h(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \qquad a = (0,0,2)$

Enunciado general del teorema de la función implícita:

Dada $g : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = (y_1, \ldots, y_n)$ diferenciable con continuidad en un entorno del punto $P_0 \in \mathbb{R}^{m+n}$. Si

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+n}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{m+1}} & \frac{\partial g_2}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_{m+n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_{m+1}} & \frac{\partial g_n}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_{m+n}} \end{pmatrix} \neq 0$$

entonces existe $U \subset \mathbb{R}^m$ entorno abierto de $(p_1, \ldots, p_m)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ entorno abierto de $g(P_0) = (M_1, \ldots, M_n)$ y una función diferenciable $f : U \to V$ tal que $(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ para todo $(x_1, \ldots, x_m) \in U$, y en particular vale que $f(p_1, \ldots, p_m) = (p_{m+1}, \ldots, p_{m+n})$ (f es el despeje de las últimas n variables en función de las m primeras). Además vale la fórmula

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+n}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{m+1}} & \frac{\partial g_2}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_{m+n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_{m+1}} & \frac{\partial g_n}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_{m+n}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

24. Suponiendo la existencia del despeje f, pruebe la fórmula matricial anterior para los casos $m = 1,\ n = 2$; $m = 2,\ n = 2$; $m = 3,\ n = 4$ y el caso general.

25. Dadas dos superficies en S_1 y $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ definidas implícitamente

$$\begin{cases} S_1: & F(x,y,z) = 0 \\ S_2: & G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

con $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones C^1. Supongamos que $S_1 \cap S_2$ es una curva con parametrización $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, y sea $\sigma(t_0) = P_0 \in S_1 \cap S_2$. Probar que si el Jacobiano parcial

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) := \det \left(\begin{array}{cc} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{array} \right)\Bigg|_{P_0} \neq 0$$

entonces se puede despejar $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en un entorno de P_0 de modo diferenciable y valen las fórmulas

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

Sugerencia: use el ejercicio 24

26. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + 3y - 7z = 0 \\ -x - 2y + \frac{21}{2}z = 0 \end{cases}$$

   (a) Teniendo en cuenta que el sistema tiene dos ecuaciones linealmente independientes en tres incógnitas, del Teorema de la dimensión deducimos que podemos despejar dos incógnitas en función de una sola variable libre. Resolver entonces el sistema de ecuaciones despejando x y z en función de y.

   (b) ¿Alguna dificultad en el ítem anterior?

   (c) ¿Cuáles son los menores no nulos de la matriz? ¿Cuáles son entonces los posibles despejes?

27. Considerar las superficies definidas por las siguientes ecuaciones:

$$z = 4x^2 - 3y^2 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 24$$

Probar que existe un entorno del punto $P = (2, -2, 4)$ en donde la intersección de las dos superficies se puede escribir como una curva. Hallar la recta tangente a dicha curva en el punto P.

28. Dado el sistema

$$\begin{cases} S_1: & x^3 + 2y^3 - 9z + 1 = 0 \\ S_2: & x - y + z^3 + 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Verifique que el punto $(-2,2,1) \in S_1 \cap S_2$.

(b) Halle $\frac{dy}{dx}(-2)$ y $\frac{dz}{dx}(-2)$. Dé una expresión genérica de $\frac{dy}{dx}$ y de $\frac{dz}{dx}$.

29. Análogo al ejercicio 25 para el caso en que F y G dependen de las variables (x, y, u, v) y se quiere despejar $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$. Verificar que la condición necesaria para que exista este despeje es que

$$\frac{\partial (F, G)}{\partial (u, v)}(P_0) = \det \begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix} \neq 0$$

y entonces en un entorno de P_0 valen las fórmulas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

Halle las fórmulas correspondientes para $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$.

30. Dado el sistema

$$\begin{aligned} xu^3 + v &= y^2 \\ 3uv - x &= 4 \end{aligned}$$

(a) ¿Bajo qué condiciones se pueda asegurar la existencia de un “despeje” de las variables u y v en términos de x e y?.

(b) Considere el punto $(x, y, u, v) = \left(0, 1, \frac{4}{3}, 1\right)$. Verifique que es una solución del sistema dado. Calcule $u_x(0,1)$ y $u_y(0,1)$

31. En el siguiente modelo macroeconómico cada variable representa lo siguiente:

Y :	renta nacional	C :	consumo	I :	inversión
G :	gasto público	T :	ingreso por impuesto	r :	tasa de interés
M :	oferta monetaria				

y f, h y m son funciones de una variable derivables, que cumplen $0 < f' < 1,\ h' < 0$ y $m' < 0$. El modelo establece las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= f(Y - T) \\ I &= h(r) \\ r &= m(M) \end{aligned}$$

(a) Verificar que existe un despeje de las variables Y, C, I y r en función de las variables M, T y G entorno de cualquier punto solución del sistema.

(b) Hallar $\frac{\partial Y}{\partial T}$, $\frac{\partial C}{\partial T}$, $\frac{\partial Y}{\partial M}$ y $\frac{\partial I}{\partial T}$ e interprete los signos.

32. Consideremos ahora el modelo

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= f(Y, T, r) \\ I &= h(Y, r) \end{aligned}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son diferenciables, tales que $f_Y > 0$, $f_T < 0$, $f_r < 0$, $h_Y > 0$, $h_r < 0$ y $f_Y + h_Y < 1$

(a) ¿Se puede despejar Y en términos de T, G y r?.

(b) ¿Qué ocurre con Y si T crece?,¿y si G crece?.¿y qué pasa con C cuando G crece?. ¿Podemos decir qué pasa con I cuando crece r?