Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Cuat II - 2009

Práctica 6: Extremos restringidos - Multiplicadores de Lagrange

1. Determinar los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

   a) $f(x,y) = xy(x-y)^2$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$

   b) $f(x,y) = xy(x-y)^2$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$

   c) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$

   d) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $\quad A = \mathbb{R}^2$

   e) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

2. Considerar el cuadrado de vértices $(-1,0), (1,0), (1,-2)$ y $(-1,-2)$. Sea A la región determinada por el cuadrado y su interior. Encontrar los extremos absolutos de la función
$$f(x,y) = 2x - y^2$$
en el recinto B, donde B es el recinto
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\right\} \cap A.$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función
$$f(x,y) = (y-1)^2 - x^3 + 3x^2 + 5.$$
Encontrar, justificando su existencia, el máximo y el mínimo valor que alcanza f en la región
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 \leq y \leq 4\}.$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x + \frac{1}{4}$$
Encontrar, justificando su existencia, el máximo y el mínimo valor que alcanza f en la región
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1; \; x + y \geq 0\}.$$

5. En los siguientes enunciados $A = \{(x,y) \text{ tal que } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$, $f(x,y)$ es una función continua definida en A, y ∂A es el conjunto frontera de A. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique.

   (a) Si f es diferenciable en un abierto que contiene a A y $\nabla f(x,y)$ tiene sus dos componentes positivas en todo punto de A, el máximo de f en A se alcanza en la frontera de A.

(b) Si f es diferenciable en un abierto que contiene a A y $\nabla f(x,y)$ tiene sus dos componentes positivas en todo punto de A, el máximo de f en A se alcanza en alguno de los vértices de A.

(c) Si f es diferenciable en un abierto que contiene a A y $\nabla f(x,y)$ tiene sus dos componentes negativas en todo punto de A, el máximo de f en A se alcanza en la frontera de A.

(d) Si $f(x,y)$ es una función convexa, el máximo de f en A se alcanza en la frontera de A.

(e) Si $f(x,y)$ es una función cóncava, el máximo de f en A se alcanza en la frontera de A.

(f) Si $f(x,y)$ es una función cóncava, el mínimo de f en A se alacanza en la frontera de A.

(g) Si $f(x,y)$ es una función cóncava, el máximo de f en A se alcanza en un solo punto.

(h) Si $f(x,y)$ es una función estrictamente cóncava, su máximo en A lo alcanza en un solo punto.

(i) Si $f(x,y)$ es una función convexa, su máximo en A lo alcanza en alguno de los vértices.

(j) Si $f(x,y)$ es una función convexa, su máximo en A lo alcanza solamente en alguno de los vértices.

(k) Si $f(x,y)$ es una función cóncava, su mínimo en A lo alcanza en alguno de los vértices.

(l) Si $f(x,y)$ es una función afín , su máximo y su mínimo en A lo alcanza en alguno de los vértices.

(m) Si $f(x,y)$ es una función afín , su máximo y su mínimo en el conjunto A lo alcanza solamente en alguno de los vértices.

(n) Sea $f(x,y)$ una función convexa cuyo valor mínimo es m. Si $f(a_1,a_2) = f(b_1,b_2) = m$, entonces $f(c_1,c_2) = m$ para todo punto (c_1,c_2) del segmento que une los puntos (a_1,a_2) y (b_1,b_2).

(o) Sea $f(x,y)$ una función cóncava cuyo valor máximo es M. Si $f(a_1,a_2) = f(b_1,b_2) = M$, entonces $f(c_1,c_2) = M$ para todo punto (c_1,c_2) del segmento que une los puntos (a_1,a_2) y (b_1,b_2).

(p) Si $f(x,y)$ es convexa y diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\nabla f(1,0) = \nabla f(0,1) = (0,0)$ entonces $\nabla f(0,1) = (0,0)$ para todo (a,b) en el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$.

(q) Si las derivadas parciales de $f(x,y)$ se anulan en un punto interior (c_1,c_2), entonces $f(c_1,c_2)$ es el mínimo o el máximo.

(r) Si $f(x,y)$ es cóncava y sus derivadas parciales se anulan en un punto interior (c_1,c_2), entonces $f(c_1,c_2)$ es el máximo.

(s) Si $f(x,y)$ es convexa y sus derivadas parciales se anulan en un punto interior (c_1,c_2), entonces $f(c_1,c_2)$ es el mínimo.

(t) Si $f(x,y)$ es una función convexa y el máximo de la función se alcanza en un punto de ∂A, entonces f es una función constante en A.

(u) Si $f(x,y)$ es una función convexa, $\max\limits_{(x,y)\in A}(f) = \max\limits_{(x,y)\in\partial A}(f)$.

(v) Si $f(x,y)$ es una función cóncava, $\min\limits_{(x,y)\in A}(f) = \min\limits_{(x,y)\in\partial A}(f)$.

(w) Si $f(x,y)$ es una función afín, $\max\limits_{(x,y)\in A}(f) = \max\limits_{(x,y)\in\partial A}(f)$ y $\min\limits_{(x,y)\in A}(f) = \min\limits_{(x,y)\in\partial A}(f)$.

6. Encontrar el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima

   (a) Usando multiplicadores de Lagrange

   (b) Reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

7. Encontrar los máximos y mínimos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ dentro del círculo unitario y en el borde.

8. Encontrar los máximos y mínimos de $f(x,y) = y + x - 2xy$ en el interior y en el borde de
$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

9. Encontrar los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas:

   (a) $f(x,y,z) = x - y + z \qquad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$

   (b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 = 1\}$

   (c) $f(x,y) = xy \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1\right\}$

   (d) $f(x,y) = \max(x,y) \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$

   (e) $f(x,y,z) = x + y + z \qquad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1\}$

   (f) $f(x,y,z,w) = x + y - z - w \qquad A = \{(x,y,z,w) / x^2 + y^2 = 1 \text{ y } w = x + z\}$

10. Resolver los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

    (a) Encontrar la distancia más corta desde el punto $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$ hasta el plano de ecuación $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ donde $(b_1,b_2,b_3) \neq (0,0,0)$.

    (b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que esté más cerca del origen.

    (c) Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide
    $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
    es $8abc/3\sqrt{3}$.

11. Encontrar la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$.

12. Encontrar el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.

13. Si α, β, γ son tres ángulos positivos tales que $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$, entonces

$$\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)\ \operatorname{sen}(\gamma) \leq \frac{1}{8}$$

14. Sea E el elipsoide definido por

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 3x^2 + y^2 - 2xy + z^2 = 1\}.$$

Encontrar el punto $p \in E$ más lejano al plano yz.

15. Encontrar los puntos del cono

$$z^2 = (y - 2)^2 + (x - 1)^2$$

más cercanos al origen de coordenadas.

16. Un envase cilíndrico debe tener capacidad de un litro. ¿Cómo debe diseñarse el envase para minimizar el material empleado?

17. Encontrar los puntos más lejanos y cercanos al punto $(0, 0, 2)$ de la esfera de ecuación

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$$

18. Si f y $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciables, tal que el máximo de f sobre la restricción $\Phi(x, y) = c$ se alcanza en el punto (x_c, y_c) . Si la función lagrangiana es $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(\Phi(x, y) - c)$ y $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\sigma(t) = (x_c, y_c)$, probar que el multiplicador de Lagrange λ da la razón de cambio del valor máximo de f a medida que cambia el valor c de la restricción, esto es:

$$\lambda = \frac{d(f \circ \sigma)}{dc}$$