

Práctica 4:

Derivadas parciales de orden superior - Polinomio de Taylor

---

Derivadas de orden superior

1. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase  $C^2$ :

(a)  $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$

(b)  $f(x, y, z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy \operatorname{sen}(z)$

(c)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln(z)$

2. Calcular todas las derivadas de tercer orden para las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y, z) = xyz$

(c)  $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y) - \operatorname{sen}(y^2z)$

(b)  $f(x, y, z) = e^{xyz}$

(d)  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$

3. Sea  $f(x, y) = \cos(xy)$ . Además,  $x$  e  $y$  son funciones de las variables  $u$  y  $v$  de acuerdo a las siguientes fórmulas:  $x(u, v) = u + v$ ,  $y(u, v) = u - v$ . Calcular

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(x(u, v), y(u, v)) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3}{\partial u \partial v^2} f(x(u, v), y(u, v))$$

(a) Sustituyendo

(b) Usando la regla de la cadena.

Laplaciano - Función armónica

4. Se dice que una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  satisface la ecuación de Laplace o bien que es una función armónica en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  si:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla^2 f \equiv 0 \text{ en } U$$

Verificar que las siguientes funciones son armónicas en  $U \subset \mathbb{R}^3$  abierto. Determinar  $U$  en cada caso:

(a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

(c)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(b)  $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

(d)  $f(x, y, z) = e^{3x+4} \cos(3z) + 4y$

5. Sean  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = g(|x|)$ . Demostrar que:

$$\Delta f(x) = \frac{d^2g}{dt^2}(|x|) + \frac{2}{|x|} \frac{dg}{dt}(|x|)$$

6. Sean  $f, g$  dos funciones  $C^2$  definidas en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Probar que  $f$  y  $g$  son armónicas en  $U$ .

### Polinomio de Taylor

7. Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.

- (a)  $f(x, y) = (x + y)^2$  en  $(0, 0)$
- (b)  $f(x, y) = e^{x+y}$  en  $(0, 0)$
- (c)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$  en  $(0, 0)$
- (d)  $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$  en  $(1, 0)$
- (e)  $f(x, y) = \text{sen}(xy)$  en  $(1, \pi)$
- (f)  $f(x, y) = e^x \text{sen}(y)$  en  $(2, \frac{\pi}{4})$
- (g)  $f(x, y) = \ln(1 + xy)$  en  $(2, 3)$
- (h)  $f(x, y) = x + xy + 2y$  en  $(1, 1)$
- (i)  $f(x, y) = x^y$  en  $(1, 2)$
- (j)  $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$  en  $(2, 3, 4)$

8. Utilizando los resultados anteriores calcular  $(0.95)^{2.01}$

- (a) con error menor que  $1/200$
- (b) con error menor que  $1/5000$

9. Sea  $f(x, y) = xe^y$ .

- (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de  $f$  en el punto  $P = (1, 0)$ .
- (b) Usar este polinomio para aproximar el valor  $f(0,98; 0,02)$ . Estimar el error cometido.

10. Obtener la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para valores suficientemente pequeños de  $|x|, |y|$ .

11. (a) Calcular el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en  $(1, 1)$  de la función  $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$
- (b) Usar la parte a) para evaluar  $e^{\frac{4}{10}}$  usando que  $\frac{4}{10} = (1 + \frac{1}{10})^2 - (1 - \frac{1}{10})^2$ .  
Comprobar que el error que cometió es menor que 0.3

12. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$f(x, y) = \text{sen}(x) \text{sen}(y).$$

13. Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 alrededor del punto  $(1, -1, 0)$  de la función

$$f(x, y, z) = \frac{\cos(x + y) \text{sen}\left(\frac{yz}{x}\right)}{(2x + y)e^{z + (x^2 - y^2)}}$$

14. Dada  $f(x, y) = (x + 1, 2y - e^x)$  y sea  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, tal que el polinomio de Taylor de grado 2 de  $g \circ f$  en  $(0, 0)$  es

$$4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy.$$

Calcular  $\nabla g(1, -1)$ .

15. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 en  $(0, 0)$  de las funciones  $f(x, y)$  dos veces diferenciables, que satisfacen la condición:

(a)  $xf(x, y) + yf(x, y) = f(x, y) + 2$

(b)  $xf_y(x, y) = yf_x(x, y)$

(c)  $f_{yx}(x, y) = x + f_x(x, y)$