Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Primer Cuatrimestre - 2010

Práctica 5:
Convexidad y Extremos

---

1. Probar que

   (a) Una función estrictamente cóncava es cóncava.

   (b) Una función estrictamente convexa es convexa.

   (c) La suma de dos funciones cóncavas es cóncava.

   (d) La suma de dos funciones convexas es convexa.

   (e) Si f es función cóncava y α es numero positivo entonces αf es función cóncava.

   (f) La suma de una función cóncava y una estrictamente cóncava es estrictamente cóncava.

   (g) Si f es cóncava entonces $-f$ es convexa.

   (h) Si una función es afín entonces es cóncava y convexa .

   (i) Si una función es cóncava y convexa entonces es afín.

   (j) Si f es cóncava y g es afín, entonces $g \circ f$ y $f \circ g$ son cóncavas, simpre que se puedan componer. Vale lo análogo para convexas.

2. (a) ¿Es el producto de dos funciones cóncavas una función cóncava? ¿Es el producto de dos funciones convexas una función convexa?.

   (b) ¿Es la diferencia de dos funciones cóncavas una función cóncava? ¿Es la diferencia de dos funciones convexas una función convexa?.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable sólo una vez y convexa, tal que $f(2,3) = 1$ y $\nabla f(2,3) = (-1,2)$, entonces $f(1,2) \geq 0$.

4. Dadas la funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} (a) & f(x,y) = 2x + x^2 + y^2 + y^3 \\ (b) & f(x,y) = -y + x^2 - y^2 - x^3 + y^3 \\ (c) & f(x,y) = 2x + 3y + x^2 - y^3 \\ (d) & f(x,y) = y + x^2 - 4xy + 2y^2 + (x+y)^3 \end{array}$$

   Para cada una de las funciones dadas dibujar los puntos del plano donde es:

   (a) Convexa y estrictamente convexa.

   (b) Es cóncava y estrictamente cóncava.

Con lo recién hecho, ¿puede determinar para cada función los máximos locales, los mínimos locales y los puntos de ensilladura?.

5. (a) Calcular los extremos de $f(x,y) = x^2+y^4$ y de $g(x,y) = x^4+y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

   (b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

6. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:

   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

   (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$

   (c) $f(x,y) = xy$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$

7. Sea $f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Probar que:

   (a) $(0,0)$ es un punto de ensilladura.

   (b) El determinante de la matriz $Hf(0,0)$ es cero.

   (c) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

   (a) Probar que $(0,0)$ es un punto crítico pero no extremo.

   (b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?

9. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura. Si fuera necesario realice el mapa de gradientes para analizar lo pedido.

   (a) $f(x,y) = (2x + 1 - y)^2$

   (b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

   (c) $f(x,y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

   (d) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$

   (e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$

   (f) $f(x,y) = (x - y)^2 + 1 + 2(x - y)$

   (g) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

   (h) $f(x,y,z) = xy + z^2$

   (i) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$

(j) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

(k) $f(x) = \frac{1}{1+||x||^2}, \;\; x \in \mathbb{R}^n$

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(0,1) = 0, \nabla f(0,1) = (0,2) \text{ y } Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$

(a) Calcular $Hg(0,1)$

(b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?

11. Decidir si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x,y) = e^{y^4-x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

12. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar.

(a) Si el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 1 + x - y + x^2 + y^2$$

entonces $f(x,y)$ es convexa en $\mathbb{R}^2$.

(b) Si el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 1 + 2x - y + xy - x^2 + y^2$$

entonces

$$g(x,y) = f(x,y) - 2x + y + x^2y$$

tiene un mínimo local en $(0,0)$.