Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Primer Cuatrimestre - 2010

Práctica 8: Integración

Integración en una variable (repaso)

1. Calcular:

   (a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx.$

   (c) El área entre las curvas $y = \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2\pi.$

2. Calcular:

   (a) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx.$

   (c) $\displaystyle\int x e^{x^2}\, dx.$

   (d) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\, dx.$

   (e) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x-2}\, dx.$

   (f) $\displaystyle\int \ln x\, dx.$

3. Hallar el área encerrada por las curvas:

   (a) $y = x^3$ e $y = x$.

   (b) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a esta curva en $x = -1$.

   (c) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ y la recta $y = 12$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

4. (a) Calcular $\displaystyle\int_{-2}^{0} e^x\, dx.$

   (b) Hallar el área encerrada por las curvas: $y = 0,\ y = -2,\ y = \log x$ y $x = 0$. Sugerencia: Dibujar la región y usar a).

5. Calcular:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 - 1\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x^2 - 1|\, dx.$

   (c) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x^2 + 1|\, dx.$

   (d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \big||x-1| - |x|\big|\, dx.$

   (e) $\displaystyle\int_{1}^{4} \sqrt{|x-3|}\, dx.$

   (f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(|x|)\, dx.$

Integrales impropias

6. (a) Para todos los valores reales de $p > 0$, estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

$$\text{i. } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \text{ii. } \int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \text{iii. } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

Observación: Dividir los valores de p de la siguiente manera: $0 < p < 1,\ p = 1$ y $p > 1$.

(b) Relacionar los resultados obtenidos con el hecho de que para $x > 0$, x^{-p} y $x^{-\frac{1}{p}}$ son funciones inversas y, por lo tanto, el gráfico de una es el de la otra reflejado respecto de la recta $y = x$.

7. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,\ln^2 x}$.

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,dx$.

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$.

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,dx$.

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(1-x)^3}$.

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+\cos x}\,dx$.

(k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(2x)\,dx$.

(l) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x}{x^2-4}\,dx$.

En los ítems i), k) y l) estudiar, además, el valor principal.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si f es continua y positiva tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

(b) Si f es continua y positiva tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{-\infty} f(x)\,dx = -\infty$

(c) Si f es continua y decreciente con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx = 3$, entonces el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(d) Si f es una continua y positiva con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx = 8$, entonces el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(e) Si f es continua y positiva con $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.

9. Para los distintos valores de $p \in \mathbb{R}$ analizar la convergencia de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1 \ + \ x^2)}.$$

10. Analizar la convergencia de la siguiente integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(x)} + (x-1)^2}\, dx.$$

Sugerencia: Calcular los primeros términos del polinomio de Taylor de $\ln(x)$ en $x_0 = 1$.

11. Analizar la existencia de la siguiente integral impropia

$$\int_1^{2} \frac{e^x}{\sqrt{-x^3 + 3x^2 - 2x}}\, dx.$$

Integrales dobles

12. Evaluar cada una de las integrales siguientes si $R = [0,1] \times [0,1]$:

(a) $\displaystyle\iint_R (x^3 + y^2)\, dxdy.$

(b) $\displaystyle\iint_R ye^{xy}\, dxdy.$

(c) $\displaystyle\iint_R (xy)^2 \cos x^3\, dxdy.$

(d) $\displaystyle\iint_R \ln[(x+1)(y+1)]\, dxdy.$

(e) $\displaystyle\iint_R (x^m y^n)\, dxdy$, donde $m, n > 0$.

(f) $\displaystyle\iint_R (ax + by + c)\, dxdy.$

(g) $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}(x+y)\, dxdy.$

(h) $\displaystyle\iint_R (x^2 + 2xy + yx^{1/2})\, dxdy.$

13. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$ y $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

14. Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Mostrar que si consideramos el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ entonces

$$\iint_R [f(x)g(y)]\, dxdy = \int_a^b f(x)\, dx \int_c^d g(y)\, dy.$$

15. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = \operatorname{sen} y$, los planos $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \pi/2$ y el plano xy.

16. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0,1] \times [0,2]$ y los "lados verticales" de R.

17. Sean $F \in \mathcal{C}^2$ y $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$. Calcular $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy$ en términos de F.

18. Graficar las regiones determinadas por los límites de integración de las siguientes integrales y calcular las integrales iteradas.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} dydx.$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dydx.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y)\,dydx.$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\,dydx.$

(e) $\displaystyle\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2+y)\,dxdy$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\,dydx.$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dydx.$

(h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y\mathrm{sen}\,x\,dydx.$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (x^n+y^m)\,dxdy \;(m,n>0).$

(j) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x\,dydx.$

(k) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\mathrm{sen}\,y} y\,dxdy.$

(l) $\displaystyle\int_{-2}^0 \int_{x^3}^{x+1} (y^2+1)\,dydx.$

19. Sea $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y, & \text{si } x \text{ no es racional} \end{cases}$$

Mostrar que la integral iterada $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right] dx$ existe pero f no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

20. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r y el área de una elipse con semiejes de longitud a y b.

21. Calcular el área de:

(a) la región limitada por la recta $y = x$ y por la curva $y = x^2$.

(b) la región formada por todos los puntos (x,y) tales que $|x|+|y| \leq a,\ a \geq 0$.

(c) la región formada por todos los puntos (x,y) tales que $x \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 2,\ x^2+y^2 \geq 1$.

22. Calcular

$$\iint_T (x\mathrm{sen}\,x + y\mathrm{sen}\,(x+y))\,dxdy$$

siendo T el triángulo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$ y $(3,3)$.

23. Sea D la región acotada por los semiejes positivos de x e y y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular
$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

24. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular
$$\iint_D x^3 y\, dxdy.$$

25. Calcular el volumen de un cono de base de radio r y altura h.

26. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

   (a) R: encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.
   (b) R: encerrada por el cono de altura 4 dado por $z^2 = x^2 + y^2$.
   (c) R: encerrada por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
   (d) R: elipsoide con semiejes a,b y c.
   (e) R: determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ y $z \geq 2$.

27. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, graficar las regiones correspondientes y evaluar la integral por los dos caminos.

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 xy\, dydx.$
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2\, dxdy.$
   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y\, dydx.$
   (d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2\, dxdy.$
   (e) $\displaystyle\int_{-3}^3 \int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2\, dxdy.$

28. Calcular $\displaystyle\int_D y^2 x^{1/2}\, dxdy$ donde
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$$

29. Sea D la región limitada por las rectas $y = 2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ e $y = 1$. Calcular la siguiente integral
$$\iint_D x^2 y\; dA$$

30. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$ Calcular la siguiente integral
$$\iint_D \cos\left(\frac{x}{y}\right)\; dA$$

31. Calcular $\displaystyle\int_T e^{x-y}\, dxdy$ donde T es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$, y $(2, 2)$.

32. Sea T la región "triangular" limitada por las rectas $y = x$, $y = \sqrt{2}$ y la curva $y = \sqrt{x}$. Calcular
$$\iint_R e^{\frac{x}{y}}\ dA.$$

Integrales triples

33. Calcular:

(a) $\displaystyle\iiint_C (xyz + x^2y^2z^2)\, dV$, donde $C = [0,1] \times [-3,2] \times [-1,1]$.

(b) $\displaystyle\iiint_C (x\cos z + y\cos x + z\cos y)\, dV$, donde $C = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi]$.

34. Calcular el volumen de una esfera de radio r.

35. Calcular:

(a) $\displaystyle\iiint_W x\, dV$, donde W es la región limitada por, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, $z = x^2+y^2$.

(b) $\displaystyle\iiint_W x^2\cos z\, dV$, donde W es la región limitada por, $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$.

(c) $\displaystyle\iiint_W dV$, donde W es la región limitada por, $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$.

(d) $\displaystyle\iiint_W (x + y + z)\, dV$, donde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \leq 1\}$.

(e) $\displaystyle\iiint_W (x^3 + y + z)\, dV$, donde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1], x^2 + y^2 \leq 1\}$.

36. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dzdydx$ y graficar la región de integración.

37. Cambiar el orden de integración en
$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z)\, dzdydx$$
para obtener otras cinco formas de realizar la misma integración. Graficar la región de integración.

38. Sea $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \leq 1\}$. Demostrar que si f es una función continua en B, impar respecto de z (es decir $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$), entonces $\iiint_B f(x,y,z)\, dV = 0$. ¿Para que otras regiones vale este resultado? (dar ejemplos).

39. Sea W la región determinada por las condiciones $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq xy$.

(a) Hallar el volumen de W.

(b) Calcular $\displaystyle\int_W x\,dxdydz$.

(c) Calcular $\displaystyle\int_W y\,dxdydz$.

(d) Calcular $\displaystyle\int_W z\,dxdydz$.

(e) Calcular $\displaystyle\int_W xy\,dxdydz$.