Posibles resoluciones de los ejercicios del Primer Parcial

Ejercicio 1

Se tiene la función $f(x) = |x^3 - 27|$.

(a) *Estudiar la existencia de* $f'(x)$ *para cada* $x \in \mathbb{R}$ *y calcularla en los puntos donde existe.*

(b) *Hallar, si existen, todos los* $a \in \mathbb{R}$ *para los cuales la recta tangente al gráfico de* f *en* $(a, f(a))$ *sea paralela a la recta de ecuación* $y - 27x + 11 = 0$.

(c) *Hallar, si existen, todos los* $a \in \mathbb{R}$ *para los cuales la recta tangente al gráfico de* f *en* $(a, f(a))$ *pasa por el punto* $(0, 27)$.

Parte a: la función $f(x)$ se puede escribir:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 27 & \text{si } x \geq 3 \\ -x^3 + 27 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}.$$

Luego, para $x > 3$ la derivada $f'(x)$ será $3x^2$ y para $x < 3$ será igual a $-3x^2$. Falta estudiar la derivabilidad en donde se pegan las dos ramas, es decir en $x = 3$. Para eso no queda otra alternativa que aplicar la definición de derivada como límite de un cociente incremental:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\left|(3+h)^3 - 27\right| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left|(27 + 27h + 9h^2 + h^3) - 27\right|}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left|27h + 9h^2 + h^3\right|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left|h(27 + 9h + h^2)\right|}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|h| \left|27 + 9h + h^2\right|}{h} = 27 \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.
\end{aligned}$$

Pero este último límite no existe pues es igual a 27 cuando $h \to 0^+$ y es igual a -27 cuando $h \to 0^-$. Por lo tanto se tiene:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x > 3 \\ \text{no existe} & \text{si } x = 3 \\ -3x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}. \tag{1}$$

Parte b: como en $(a, f(a))$ debe existir la recta tangente entonces $a \neq 3$ y la recta tangente en este punto tiene ecuación

$$y = f'(a)(x - a) + f(a). \tag{2}$$

Para que esta recta sea paralela a la recta de ecuación $y - 27x + 11 = 0$ (o lo que es lo mismo, a la recta $y = 27x - 11$) es necesario y suficiente que la pendiente de la recta (2) se 27, es decir

$$f'(a) = 27.$$

Entonces, de acuerdo a lo calculado en la parte anterior (ver fórmula (1)) los $a \in \mathbb{R}$ que cumplen la última relación se estudian por separado:

- si $a > 3$ entonces $3a^2 = 27$, con lo que $a^2 = 9$ y, como $a > 3$, no existe a con esta propiedad.
- si $a < 3$ entonces $-3a^2 = 27$, que nunca tiene solución real.

En conclusión, no existe ningún a que cumpla lo pedido en esta parte del ejercicio.
Parte c: ya sabemos que buscamos un $a \neq 3$ pues debe existir la recta tangente en $(a, f(a))$ y que la recta tangente tiene la fórmula (2). La condición de que el punto $(0, 27)$ pertenezca a esta recta es entonces equivalente a la relación (reemplazando y por 27 y x por 0 en la fórmula (2)):

$$27 = f'(a)(0 - a) + f(a),$$

o sea

$$27 = -af'(a) + |a^3 - 27|. \tag{3}$$

Analizando otra vez por casos:

- si $a > 3$ la fórmula (3) se escribe:

  $$27 = -a(3a^2) + \big(a^3 - 27\big) = -3a^3 + a^3 - 27 = -2a^3 - 27,$$

  con lo que queda $54 = -2a^3$ y por lo tanto $a^3 = -27$. Luego, a debe ser igual a -3, lo que contradice la suposición $a > 3$. Este caso entonces no aporta ninguna solución.

- si $a < 3$ se tiene entonces

  $$27 = -a(-3a^2) + (-a^3 + 27) = 3a^3 - a^3 + 27$$

  con lo que queda $0 = 2a^3$ y por lo tanto $a = 0$. Como $0 < 3$, $a = 0$ es una solución y además es la única.

Ejercicio 2

Sea $a \in (0, 3)$ y $b \in \mathbb{R}$. Probar que la ecuación

$$7x = a \sin(x - 12) + 4x + b$$

tiene una única solución en toda la recta.

Considerar la función

$$\begin{aligned} f(x) &= 7x - a \sin(x - 12) - 4x - b = \\ &= 3x - a \sin(x - 12) - b. \end{aligned}$$

Basta probar entonces que existe un único $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

- f es estrictamente creciente: veamos que $f'(x)$ es estrictamente positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando se obtiene: $f'(x) = 3 - a\cos(x - 12)$. Como $0 < a < 3$ y $\cos(x - 12) \leq 1$, entonces $a\cos(x - 12)$ es siempre menor que 3 y por lo tanto $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- f cambia de signo: dado que $a\sin(x - 12)$ está acotado superiormenete e inferiormente, se tienen los límites:

  $$\lim_{x \to +\infty} 3x - a \sin(x - 12) - b = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} 3x - a \sin(x - 12) - b = -\infty$$

  independientemente de los valores de a y b.

Como f es estrictamente creciente y cambia de signo, cruza el eje x y lo hace sólo una vez, es decir tiene una única raíz x_0.

Ejercicio 3

Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{8x^2 - 2x^3}}.$$

Empecemos estudiando el comportamiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8x^2 - 2x^3}}$$

en el intervalo $[2, 4]$.
Sacando factor común se tiene que $8x^2 - 2x^3 = 2x^2(4 - x)$. Por lo tanto $f(x)$ se puede escribir como $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^2(4-x)}}$ con lo que se observa directamente que:

- f está definida sobre el intervalo $[2, 4)$.
- f es positiva en $[2, 4)$.
- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$.

Luego, la integral en cuestión tiene sólo una singularidad en el extremo superior 4.
Dado que

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$$

se observa que en comportamiento (crecimiento) de f al acercarce a 4 por la izquierda está concentrado en el factor $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4-x}}$ (que también tiene sólo una singularidad en $x = 4$). Mas precisamente, si llamamos $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4-x}}$ se tiene que

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}.$$

Por lo tanto, por el criterio de comparación, la convergencia o no de la integral impropia que se pide en el ejercicio es equivalente a la convergencia o no de la integral impropia:

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}}.$$

Pero el análisis de la convergencia de esta integral es muy simple:

$$\lim_{r\to 4^-} \int_2^r \frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}} = \lim_{r\to 4^-} \int_2^r (4-x)^{-1/3} dx = \lim_{r\to 4^-} -(4-x)^{2/3}\Big]_2^r = 2^{2/3} < \infty.$$

Por lo tanto la integral pedida converge.

Ejercicio 4

Analizar el intervalo de convergencia (incluyendo los extremos) de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{3^n}(x+2)^n.$$

- Cálculo del radio de convergencia: aplicamos cualquiera de los dos métodos para hallar el radio de convergencia, por ejemplo el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{3^n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{e^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{e^{\frac{\sqrt{n}}{n}}} = 3$$

ya que $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = 1$, pues $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Por lo tanto el radio de convergencia es 3.

- Conjunto de convergencia: Dado que el radio de convergencia es 3, la serie converge absolutamente en el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R},\, 0 < |x+2| < 3\}$$

que es el intervalo abierto $(-5, 1)$. Falta ver que ocurre con los extremos de este intervalo:

  1. Para $x = 1$ la serie queda:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{3^n}(1+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{3^n}3^n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\sqrt{n}}$$

  pero esta serie no converge pues $\lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{n}} = +\infty$ (el límite del término general no tiende a cero).

  2. Análogamente para $x = -5$ se obtiene:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{3^n}(-5+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\sqrt{n}}$$

  que tampoco converge pues no existe $\lim_{n\to\infty} (-1)^n e^{\sqrt{n}}$ (como antes, para que la serie converja, es necesario que el límite del término general tienda a cero).

En definitiva, no converge en ninguno de los extremos.

Ejercicio 5

Hallar un polinomio $P(x)$ tal que

$$\left| \int_0^1 P(x)dx \;-\; \int_0^1 \left(\frac{1-\cos(x^3)}{x^4} + \frac{3}{4}x^3\right) dx \right| < 10^{-3}.$$

Empecemos considerando el desarrollo en serie de la función $\dfrac{1-\cos(x^3)}{x^4}$.

Como el desarrollo de $\cos x$ alrededor del 0 es:

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

el desarrollo de $\cos(x^3)$ será

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\left(x^3\right)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{6n}}{(2n)!}.$$

Por lo tanto el desarrollo de $1-\cos(x^3)$ es

$$1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{6n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{6n}}{(2n)!}. \tag{4}$$

Finalmente se obtiene el desarrollo de $\dfrac{1-\cos(x^3)}{x^4}$ dividiendo la serie (4) por x^4 (esto es posible pues la serie de $1-\cos(x^3)$ es "divisible por x^6"y por lo tanto también por x^4):

$$\frac{1}{x^4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{6n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^4}\,(-1)^{n+1}\,\frac{x^{6n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{6n-4}}{(2n)!}. \tag{5}$$

Veamos que esta serie es una serie alternada para $x\in[0,1]$ (nos interesan sólo los $x\in[0,1]$, ya que integraremos en ese intervalo). Para eso deberemos comprobar que para cada $x\in[0,1]$, la sucesión

$$a_n:=\frac{x^{6n-4}}{(2n)!}$$

es decreciente y tiende a cero.

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a 0 pues la serie converge absolutamente para todo $x\in[0,1]$, ya que tiene radio de convergencia ∞.

2. Veamos que $a_{n+1}\le a_n$, o sea que vale

   $$\frac{x^{6n+2}}{(2n+2)!}\le\frac{x^{6n-4}}{(2n)!}. \tag{6}$$

   Esto es obvio si $x=0$, de modo que supongamos $x\neq 0$, entonces (6) es equivalente a que

   $$x^6\le\frac{(2n+2)!}{(2n)!}.$$

   Como $x\in[0,1]$ se tiene que $0\le x^6\le 1$ y claramente $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}$ es siempre mayor que 1 para todo $n\in\mathbb{N}$ pues $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}=(2n+2)(2n+1)\ge 12$.

Notemos $P_k(x)$ al polinomio $\displaystyle\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{6n-4}}{(2n)!}$ (en otras palabras, el polinomio $P_k(x)$ es la suma parcial hasta k de la serie que representa a la función $\dfrac{1-\cos(x^3)}{x^4}$). Dado que arriba se demostró que la serie (5) es alternada, por el criterio de Leibnitz, se deduce que

$$\left|\frac{1-\cos(x^3)}{x^4} - P_k(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{6n-4}}{(2n)!} - P_k(x)\right| \leq \left|(-1)^{(k+1)+1}\,\frac{x^{6(k+1)-4}}{(2(k+1))!}\right| =$$
$$= \left|\frac{x^{6k+2}}{(2k+2)!}\right|.$$

Por lo tanto, integrando se obtiene para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{1-\cos(x^3)}{x^4} - P_k(x)\right) dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{1-\cos(x^3)}{x^4} - P_k(x)\right| dx \leq \int_0^1 \frac{x^{6k+2}}{(2k+2)!}dx = \tag{7}$$
$$= \frac{1}{(2k+2)!}\,\frac{1}{6k+3}\; x^{6k+3}\Big]_0^1 = \frac{1}{(2k+2)!(6k+3)}$$

Para resolver el problema pedido, tomamos $P(x) = P_k(x) + \dfrac{3}{4}x^3$ para un k adecuado que vamos a determinar para que valga la acotación por medio del siguiente razonamiento:

$$\left|\ \int_0^1 P(x)dx\ -\ \int_0^1 (\frac{1-\cos(x^3)}{x^4} + \frac{3}{4}x^3)dx\ \right| = \left|\int_0^1 (P_k(x) + \frac{3}{4}x^3)dx - \int_0^1 (\frac{1-\cos(x^3)}{x^4} + \frac{3}{4}x^3)dx\right| =$$
$$= \left|\int_0^1 (P_k(x) - \frac{1-\cos(x^3)}{x^4})dx\right| \leq$$
$$\leq \int_0^1 \left|P_k(x) - \frac{1-\cos(x^3)}{x^4}\right| dx =$$
$$= \int_0^1 \left|\frac{1-\cos(x^3)}{x^4} - P_k(x)\right| dx.$$

Pero esta última integral la tenemos estimada en (7) y así queda:

$$\left|\ \int_0^1 P(x)dx\ -\ \int_0^1 \left(\frac{1-\cos(x^3)}{x^4} + \frac{3}{4}x^3\right) dx\ \right| \leq \frac{1}{(2k+2)!6k+3}.$$

Tomando $k=1$, esta última expresión queda igual a $\dfrac{1}{4!9} = \dfrac{1}{216}$ que es mayor que 10^{-3} y por lo tanto no sirve. Por el contrario, tomando $k=2$, queda $\dfrac{1}{6!15} = \dfrac{1}{10800}$ que es menor que 10^{-3}. Finalmente el polinomio pedido $P(x)$ se puede tomar como $P_2(x) + \dfrac{3}{4}x^3$ y por lo tanto explícitamente queda:

$$P(x) = \left(\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{6n-4}}{(2n)!}\right) + \left(\frac{3}{4}x^3\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^8 + \frac{3}{4}x^3.$$

N.B.: los ejercicios han sido resueltos de manera exageradamente prolija, con un afán más que nada didáctico; por supuesto, ejercicios hechos con bastante menos detalle fueron de todos modos considerados BIEN en la corrección del examen.