Análisis II (C) - Práctica 2.

Segundo cuatrimestre de 2002.

PARTE 1: *Polinomios de Taylor.*

1. Desarrollar:

   (a) El polinomio $x^4 + 5x^2 - 5x - 3$ en potencias de $(x-2)$.

   (b) El polinomio $(x+1)^3 + 2(x+1)$ en potencias de $(x-1)$ y de x.

2. (a) Hallar el polinomio de Mc Laurin de grado tres para las funciones:

   $$\text{i. } y = \ln{(x+1)}^2 . \qquad \text{ii. } y = e^{x+2}.$$

   (b) Hallar el polinomio de Taylor de grado tres de $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ en $a = \pi/4$

   (c) Hallar el polinomio de Mc Laurin de grado tres de las funciones $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\sinh x$, $\tanh x$.

3. (a) Hallar el polinomio de Mc Laurin de grado dos y la expresión del resto de la función $y = \sqrt{1+x}$.

   (b) Usando (a) evaluar el error de la igualdad aproximada:

   $$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \quad \text{cuando} \quad x = 0,2$$

4. Calcular:

   (a) $\sqrt{e}$ con error menor que $1/10^3$;

   (b) $\cos(3°)$ con error menor que $1/10^2$;

   (c) $\sqrt[3]{122}$ con error menor que 10^{-3};

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ con dos decimales exactos.

5. Aplicar la fórmula de Taylor y su expresión del resto para calcular los siguientes límites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{\cot(x)}{x}\right]$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[x - x^2 \ln{(1+1/x)}\right]$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2(x)}{1 - e^{-x^2}}$

Parte 2: *Integrales impropias.*

6. (a) Para todos los valores reales de $p > 0$, estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

$$\text{i. } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \text{ii. } \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \text{iii. } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

Observación: Dividir los valores de p de la siguiente manera: $0 < p < 1$, $p = 1$ y $p > 1$.

(b) Relacionar los resultados obtenidos con el hecho de que para $x > 0$, x^{-p} y $x^{-\frac{1}{p}}$ son funciones inversas y, por lo tanto, el gráfico de una es el de la otra reflejado respecto de la recta $y = x$.

7. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,\ln^2 x}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^5}}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(1 - x)^3}$

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + \cos x}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x)\,dx$ (l) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

En los ítems (i), (k) y (l) estudiar, además, el valor principal.

8. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

(b) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{-\infty} f(x)\,dx = -\infty$

(c) Si $f(x)$ es una función continua y decreciente con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx = 3$, entonces el $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(d) Si $f(x)$ es una función continua y positiva con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx = 8$, entonces el $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(e) Si $f(x)$ es una función continua y positiva con $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.