

Análisis II (C) - Práctica 3.

Segundo cuatrimestre de 2002.

1. Sean $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o un contraejemplo.

(a) Si S_1 es convergente, entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ también es convergente y, además: $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cS_1$.

(b) Si S_1 y S_2 son convergentes, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente y, además: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S_1 + S_2$.

(c) Si $a_n \rightarrow 0$ entonces S_1 es convergente.

(d) Si S_1 y S_2 son divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ es divergente.

(e) Si $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n \geq 1}$ es creciente, entonces:

- i. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. ii. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ no converge.

2. Analizar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + 3n - 1}{3n^3 + 4}$

3. (a) Usando la serie geométrica, probar que las siguientes series son convergentes y hallar su suma:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^{n-2}}$ ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$ iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-2} 5}{7^{8n+4}}$

- (b) Usando la serie geométrica o la telescópica probar que las siguientes series son convergentes y que su suma es la indicada:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$ ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$ iv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)} = 1$

v. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$ vi. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) \right]}{\ln(n^n) \ln \left[(n+1)^{n+1} \right]} = \frac{1}{\ln 4}$

vii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$ viii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1$

4. A una pelota se la deja caer desde una altura de 5 m. Cada vez que rebota salta a una altura de $3/4$ partes de la distancia de la que cayó. Calcular la distancia total que recorre.

5. Determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con los siguientes términos generales:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad a_n = \frac{n+1}{2^n} & \text{(b)} \quad a_n = \frac{3^n}{2^{n^2}} & \text{(c)} \quad a_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n} \\
 \text{(d)} \quad a_n = \frac{n!}{10^n} & \text{(e)} \quad a_n = \frac{5^n}{n!} & \text{(f)} \quad a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \\
 \text{(g)} \quad a_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx & \text{(h)} \quad a_n = \frac{3n-2}{4^n} & \text{(i)} \quad a_n = \frac{n}{(2^n)!} \\
 \text{(j)} \quad a_n = \frac{(2n+3)^n}{(3n-2)^n} & \text{(k)} \quad a_n = \frac{3^n - n^2}{7^n} & \text{(l)} \quad a_n = \frac{n^3}{2^n + n^7} \\
 \text{(m)} \quad a_n = \frac{n^n}{n!} & \text{(n)} \quad a_n = \frac{n^2}{n!} & \text{(\tilde{n})} \quad a_n = \frac{(3n^2+1)4^n}{n!} \\
 \text{(o)} \quad a_n = \frac{(5^n - n^2)n!}{2^n n^n} & \text{(p)} \quad a_n = \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n} & \text{(q)} \quad a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}
 \end{array}$$

6. Criterio integral de Cauchy

Dada $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión decreciente de términos no negativos y sea $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente tal que $f(n) = a_n \forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que $\forall n > 1 : a_n \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq a_{n-1}$

(b) Deducir que $S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_{n-1}$

(c) Probar, usando (b), que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty.$$

7. Estudiar la convergencia de la serie *p-armónica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p \in \mathbb{R}).$$

8. Estudiar la convergencia de las series de término general:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} & \text{(b)} \frac{\ln n}{n} & \text{(c)} \frac{2+(-1)^n}{n^2} \\
 \text{(d)} \frac{2^n}{n \cdot 5^n} & \text{(e)} \frac{1}{\ln^k n} \quad (k \in \mathbb{N}) & \text{(f)} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \\
 \text{(g)} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)} & \text{(h)} \frac{(n!)^2}{(2n)!} & \text{(i)} \frac{n}{3n^2-3} \\
 \text{(j)} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} & \text{(k)} \frac{2^n}{(n!)^5} & \text{(l)} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \\
 \text{(m)} \frac{3n-1}{\sqrt{2^n}} & \text{(n)} \frac{n^3}{e^n} & \text{(o)} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}
 \end{array}$$

9. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las series de término general:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} a_n = \frac{(-1)^n}{2} & \text{(b)} a_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} & \text{(c)} a_n = (-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!} \\
 \text{(d)} a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} & \text{(e)} a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} & \text{(f)} a_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)
 \end{array}$$

10. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar qué pasa en los extremos.

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots \\
 \text{(b)} x + x^4 + \dots + x^{n^2} + \dots \\
 \text{(c)} 3x + 3^4 x^4 + 3^9 x^9 + \dots + 3^{n^2} x^{n^2} + \dots \\
 \text{(d)} \frac{x}{(1+\sqrt{1})} + \frac{x^2}{(2+\sqrt{2})} + \frac{x^3}{(3+\sqrt{3})} + \dots \\
 \text{(e)} x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{9x^3}{3!} + \dots + \frac{n^2 x^n}{n!} + \dots \\
 \text{(f)} \frac{(x-10)}{1 \cdot 2} + \frac{(x-10)^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{(x-10)^n}{n(n+1)} + \dots \\
 \text{(g)} (x+1) + 2!(x+1)^2 + \dots + n!(x+1)^n + \dots
 \end{array}$$

11. *El binomio de Newton*

Sea α un número real. Para cada número entero no negativo n , definimos

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(Observar que si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq n$, entonces $\binom{\alpha}{n}$ es el número combinatorio usual.)

(a) Probar que el polinomio de MacLaurin de orden m de la función $(1+x)^\alpha$ es

$$\sum_{n=0}^m \binom{\alpha}{n} x^n.$$

(b) Estudiar el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

(c) Calcular la serie de MacLaurin de

(a) $\sqrt{1+x}$ (b) $\frac{1}{(1+x)^2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

12. (a) Calcular la serie de MacLaurin de las siguientes funciones:

(a) e^x (b) e^{x^2} (c) $\cos x$ (d) $\cosh x$ (e) $\sin x$ (f) $\sinh x$

Indicar en cada caso el radio de convergencia.

(b) Sin calcular las derivadas en $x = 0$, calcular la serie de MacLaurin de las siguientes funciones:

(a) $\frac{1}{1-x}$ (b) $\frac{1}{1+x}$ (c) $\frac{1}{1+x^2}$ (d) $\ln(1+x)$
(e) $\frac{1}{2+3x}$ (f) $\frac{1}{(2+x)(x+1)}$ (g) $\sqrt{1+x^3}$ (h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(i) $\cosh x$ (j) $\cos(2x)$ (k) $\cos(x^2)$ (l) $\cos^2 x$

Indicar en cada caso el radio de convergencia.

13. Probar que

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

para x en el intervalo de convergencia de la serie.

14. Usando el criterio de Leibniz para series alternadas, calcular los siguientes números reales con error menor que 10^{-4} :

(a) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ (b) $\sin(10^\circ)$.

15. Usando los desarrollos conocidos, calcular la serie de Taylor de

(a) $\cos x$ centrada en $\pi/4$
(b) $\frac{1}{x}$ centrada en $\frac{1}{3}$
(c) $\ln x$ centrada en $\frac{1}{3}$

16. Calcular:

- (a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ con error menor que 0,001.
(b) $\sqrt{2}$ con error menor que 0,0001 (usar que $\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{1}{9}}$).
(c) $\ln 2$ con error menor que 0,001 (usar que $\ln 2 = -\ln(1-\frac{1}{2})$).
(d) $\ln 10$ con error menor que 0,01 (usar que $\ln 10 = -\ln(\frac{1}{10})$).

- (e) $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ con error menor que 0,01.
17. (a) Desarrollar en serie (indicando el radio de convergencia) la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 1$.
- (b) Calcular $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ con error menor que 0,0001.
18. Desarrollar $\arctan x$ en serie de Mac Laurin.
19. Calcular usando series alternadas
- (a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con error $< 0,0001$.
- (b) $\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x} dx$ con error $< 0,001$.
- (c) $\int_0^1 \cos(\sqrt{x}) dx$ con error $< 0,0001$.
- (d) $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{4x} dx$ con error $< 0,001$.