Análisis II (C) - Práctica 5.

Segundo cuatrimestre de 2002.

Derivadas parciales

1. Calcular

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ para $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$ para $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2} + \ln y$

   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ para $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Sean las funciones

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = |x| + |y|$$

   Demostrar que en el origen

   (a) f_1 es discontinua aunque existen las derivadas parciales.

   (b) f_2 no admite derivadas parciales pero es continua.

3. Estudiar la continuidad y existencia de derivadas parciales de las siguientes funciones en el origen:

   (a) $f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} x \sin\left(4 \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0 \end{cases}$

4. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones

   (a) $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$

   (b) $f(x,y,z) = ye^x + z$

   (c) $f(x,y) = \sin x$

   (d) $f(x,y,z) = xyz + \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

   (e) $f(x,y,z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2+y^2+1))$

   (f) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$

   (g) $f(x,y,z) = \cos(ye^{xy})\sin x + \arctan z$

   (h) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y e^{\sin t}dt$

   (i) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^{x^2+y^2} e^t\,dt$

   (j) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$

   (k) $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$

Diferenciabilidad

5. (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

   $$f(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2, 2x_1+3x_2).$$

      i. Verificar que f es una transformación lineal, y calcular su matriz asociada.
      ii. Calcular la matriz de la diferencial $Df(x)$.
      iii. ¿Qué relación hay entre estas dos matrices?

   (b) Mostrar que lo ocurrido en el ítem anterior vale para cualquier transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

6. Mostrar que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   es diferenciable pero sus derivadas parciales son discontinuas.

7. Calcular $DF(x)$ para las siguientes funciones

   (a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad F(x,y) = (x,y)$.
   (b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\quad F(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x+e^y)$.
   (c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad F(x,y,z) = (x+e^z+y, yx^2)$.
   (d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad F(x) = \|x\|^2$.

8. Estudiar la diferenciabilidad en el origen de las funciones del ejercicio 3.

9. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican y escribir la ecuación del plano tangente cuando exista.

(a) $f(x,y) = xy + 1 - \sin(\frac{x^2}{2})$ en $(1,5)$ y en $(2,2)$.

(b) $f(x,y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}$ en $(0,0)$ y en $(16,1)$.

(c) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ en (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
en $(0,0)$ y en $(1,0)$.

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
en $(0,0)$ y en $(-1,1)$.

10. Calcular el gradiente de f para

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, (b) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$,

(c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

Regla de la cadena

11. Sean $f(u,v,w) = u^2 + v^3 + w\,u$ y $g(x,y) = x \sin y$. Dadas

$$u(t) = t^2 + 1; \quad v(t) = \sin t \quad w(t) = t - 1$$

y $x(t) = \sin t$; $y(t) = t$ calcular

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t), w(t)) \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt} g(x(t), y(t))$$

(a) usando la regla de la cadena, (b) sustituyendo.

12. Sean $f(u,v) = e^{uv}\sin(u^2+v^2)$, $g(u,v,w) = \ln(u^2+v^2+w^2+1)$. Dadas $u(x,y) = x+y$, $v(x,y) = xy$, $w(x,y) = x - y + 1$, calcular las derivadas parciales de las funciones

(a) usando la regla de la cadena, (b) sustituyendo.

13. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$f(x_1,x_2) = (e^{x_1}, x_2, x_1+x_2), \; g(x_1,x_2,x_3) = (\sin(x_1 x_2), x_3)\,,$$

y sea $F(x_1,x_2) = g\left(f(x_1,x_2)\right)$. Calcular $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad i,j = 1,2$

(a) usando la regla de la cadena, (b) sustituyendo.

14. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } f(x,y) = \int_0^{2y} x^2 z + z^3 dz, \quad \text{(b) } f(x) = \int_0^x \frac{\sin xy}{y} dy, \quad \text{(c) } f(x) = \int_x^{x^2} e^{tx} dt.$$

15. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

    (a) $\phi(x, y) = h(f(x)g(y), f(y)g(x))$

    (b) $\phi(x, y) = h(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$

    (c) $\phi(x, y) = h(x, h(x, y))$

Aplicaciones

16. Aproximar $(0,99e^{0,02})^8$ usando la expresión del plano tangente de una función f adecuada.

17. *Teorema del Valor Medio para 2 variables*

    Demostrar que si f es una función diferenciable definida en algún abierto que contiene al segmento P_1P_2, entonces vale que

    $$f(P_1) - f(P_2) = \nabla f(P).(P_1 - P_2)$$

    donde P es algún punto del segmento P_1P_2, y el producto del segundo miembro es el producto escalar de vectores.

18. (a) Sea $f : B \to \mathbb{R}$, donde B es una bola en $\mathbb{R}^2$.

    i. Probar que si f es constante en B, entonces $\nabla f(x, y) = 0$, cualquiera sea $(x, y) \in B$.

    ii. Probar que si $\nabla f(x, y) = 0$ cualquiera sea $(x, y) \in B$, entonces f es constante en B.

    (b) Si $f, g : B \to \mathbb{R}$ son diferenciables, y verifican que $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$ para todo $(x, y) \in B$, probar que entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

    $$f(x, y) = g(x, y) + c.$$

19. (a) *Coordenadas polares*

    Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y $g(r, \theta) = f(x, y)$.

    Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

    (b) *Coordenadas esféricas*

    Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)\sin(\phi)$, $y = r\sin(\theta)\sin(\phi)$, $z = r\cos(\phi)$ y $g(r, \theta, \phi) = f(x, y, z)$

    Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \phi}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

    (c) *Coordenadas cilíndricas*

    Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y $g(r, \theta, z) = f(x, y, z)$

    Calcular$\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

Derivadas direccionales

20. Hallar las derivadas direccionales de f en el origen en cualquier dirección v, $\|v\| = 1$, siendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

21. Sea $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

    (a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

    y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

    (b) Mostrar que f es continua en $(0,0)$.

    (c) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

22. Calcular la derivada direccional de f en x_0 en la dirección v siendo:

(a)	$f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$	$x_0 = (1,1)$	$v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
(b)	$f(x,y) = x^4 + \ln(xy)$	$x_0 = (e,1)$	$v = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$
(c)	$f(x,y,z) = e^z(xy+z^2)$	$x_0 = (0,1,0)$	$v = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
(d)	$f(x,y,z) = y + yz + zx$	$x_0 = (1,1,1)$	$v = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$
(e)	$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$	$x_0 = (1,1,1)$	$v = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$
(f)	$f(x,y,z) = x^{yz}$	$x_0 = (e,e,0)$	$v = (\frac{12}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13})$

Si f es diferenciable en x_0, verificar que la derivada calculada coincide con $\nabla f \cdot v$.

23. Mostrar que el vector $v = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ es normal a la superficie $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ en el punto $(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e interpretar este hecho geométricamente.

24. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que la función definida por $h(x) = f(x)g(x)$ es diferenciable en x_0 y

$$\nabla h(x_0) = f(x_0)\nabla g(x_0) + g(x_0)\nabla f(x_0)$$

¿Qué relación existe entre la derivada direccionales de h en x_0 en la dirección v ($\|v\| = 1$) y las derivadas direccionales de f y g en x_0 en la misma dirección?

25. Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados

(a)	$x^{10}y - x\cos(z) + 7 = 0$	$x_0 = (7,0,0)$
(b)	$xy - z\ln(y) + e^{xy} = 1$	$x_0 = (0,1,1)$
(c)	$xy + ze^{xy} - z^2 = 0$	$x_0 = (4,0,1)$
(d)	$\cos(x)\cos(y)e^z = 0$	$x_0 = (\pi/2,1,0)$

26. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0) y $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y, z) = f(x, y) - z$, ver qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de f en (x_0, y_0) y el plano tangente a una superficie de nivel de h en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

27. (a) Mostrar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.

    (b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función $f(x, y) = 10 + 6\cos(x)\cos(y) + 3\cos(2x) + 4\cos(3y)$. En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encontrar las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de temperatura.

28. El capitán Ralph se encontró en el lado soleado de Mercurio y notó que su traje espacial se fundía. La temperatura en un sistema rectangular de coordenadas cerca suyo viene dada por

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-zy} + e^{-3z}$$

Si él está ubicado en $(1, 1, 1)$ ¿En qué dirección deberá comenzar a moverse con el fin de enfriarse lo más rápido posible?

Teoremas de la función implícita e inversa

29. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Probar que

$$\det(DF(x, y)) \neq 0 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

pero que F no es inyectiva.

30. Determinar si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase C^1 en el punto dado

    (a) $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en $(x, y) \neq (0, 0)$

    (b) $F(x, y) = (\sin x, \cos(xy))$ en $(\pi, \pi/2)$

31. Sea $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$. Demostrar que $f(x, y, z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y, z)$ en el punto $(1, 1, 1)$. Encontrar $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$ y $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$.

32. Hallar la solución $y = f(x, z)$ de $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ en un entorno de los siguientes puntos del plano xz

    (a) $(5, 10)$ (b) $(0, 64)$.

    Escribir explícitamente esos entornos.

33. Determinar las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones

    (a) $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \qquad P = (2, 0)$

    (b) $g(x, y) = x^5 + y^5 + xy = 3 \qquad P = (1, 1)$

    (c) $h(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \qquad P = (0, 0, 2)$

34. Hallar los planos tangentes a la superficie $\mathcal{S} : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ que sean paralelos al plano $\Pi : x + 4y + 6z = 8$.

35. Calcular los vectores velocidad y rapidez de las siguientes curvas:

    (a) $\sigma(t) = (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t), 2t - t^2)$

    (b) $\sigma(t) = (\sin(2t), \ln(1 + t), t)$

    (c) $\sigma(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$

36. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente en los valores de t dados para las curvas

(a)	$\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, e^2)$	$t = 1, \quad t = 2$
(b)	$\sigma(t) = (t, t + 1, t^2 + 2)$	$t = 0, \quad t = \frac{1}{2}$
(c)	$\sigma(t) = (t^2 \sin t, (t - 1)\, e^t, t)$	$t = 1, \quad t = 8$
(d)	$\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$	$t = 0, \quad t = -1$
(e)	$\sigma(t) = (0, 0, t)$	$t = 1, \quad t = -7$

37. Supongamos que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ hasta que se desprende súbitamente sobre una tangente en $t_0 = \pi$. ¿Dónde estará cuando $t = 4$?

38. Describir los siguientes conjuntos como trayectorias de curvas.

    (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = e^x\}$

    (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 4x^2 + y^2 = 1\}$

    (c) Una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y el punto (a, b, c).