Análisis II (C) - Práctica 6.

Segundo cuatrimestre de 2002.

1. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase C^2.

   (a) $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$, (b) $f(x,y,z) = e^z y + \dfrac{e^y}{x} + xy \sin z$,

   (c) $f(x,y) = x^2 e^{\frac{y}{x}} + y^2$.

2. Determinar en cada caso si existe una función f que satisfaga las condiciones requeridas. Si existe alguna, encontrar todas.

   (a) $\nabla f(x,y) = (3x^2y + 2y^2, x^3 + 4xy - 1)$, $f(1,1) = 4$.
   (b) $\nabla f(x,y) = (5y, 2x)$.
   (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy} + xy\, e^{xy} + \cos x + 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 e^{xy}$.
   (d) $\nabla f(x,y,z) = (e^{y+z^2}, xe^{z^2} + \cos y, 2xze^y e^{z^2})$, $f(0,0,0) = 1$.

3. (a) Supongamos que f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ y que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0\ \forall (x,y)$.

   Probar que $f(x,y) = g(x) + h(y)$.

   (b) Sean f de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ y que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$.

   i. Si llamamos $u = x + y$ y $v = x - y$, calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$.
   ii. Probar que $f(x,y) = g(x+y) + h(x-y)$.

4. Hallar la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado.

i.	$f(x,y) = (x+y)^2$	en $(0,0)$	ii.	$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$	en $(0,0)$
iii.	$f(x,y) = e^x \sin y$	en $(2, \frac{\pi}{4})$	iv.	$f(x,y) = \ln(1+xy)$	en $(2,3)$
v.	$f(x,y) = x + xy + 2y$	en $(1,1)$	vi.	$f(x,y) = x^y$	en $(1,2)$

5. Obtener la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} \simeq 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

   para valores suficientemente pequeños de $|x|, |y|$.

6. Hallar el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$f(x,y) = \sin x \, \sin y.$$

7. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y verificar que son puntos de ensilladura:

   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$

   (c) $f(x,y) = xy$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

8. (a) Calcular los extremos de $f(x,y) = x^2+y^4$ y de $g(x,y) = x^4+y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

   (b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

9. Sea $f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$. Probar que:

   (a) $\det(Hf(0,0)) = 0$

   (b) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$, esto es: si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a y b.

   (c) $(0,0)$ es un punto de ensilladura.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$:

    (a) Probar que $a = (0,0)$ es un punto crítico pero no extremo.

    (b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ son mínimos absolutos.

    (c) ¿Hay máximos relativos?.

11. Para las siguientes funciones, hallar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos, mínimos locales o puntos de ensilladura:

    (a) $f(x,y) = (2x+1-y)^2$ (b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

    (c) $f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 4xy + y^2$ (d) $f(x,y) = \ln((x+y)^2 + (x+1)^2)$

    (e) $f(x) = \frac{1}{1+\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$ (f) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

12. Hallar los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

    (a) $f(x,y) = xy(x-y)^2$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$

    (b) $f(x,y) = xy(x-y)^2$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$

    (c) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$

    (d) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $A = \mathbb{R}^2$

    (e) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

13. (a) Hallar el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima.

    (b) Resolver el mismo problema reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

14. (a) Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$$

    dentro del círculo unitario y en el borde.

    (b) Idem para $f(x,y) = y + x - 2xy$ en el interior y en el borde de $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq \frac{1}{2}\}$.

15. Encontrar los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas:
   (a) $f(x,y) = x - y + z$ $\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2$

   (b) $f(x,y) = \sin(xy)$ $\qquad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 3\,\sin x\,\cos x}{e^x}$ $\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0$

   (d) $f(x,y) = xy$ $\qquad \frac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1$

16. Resolver los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

   (a) Encontrar la distancia más corta desde el punto $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ hasta el plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 5$.

   (b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos

   $$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad \text{y} \qquad 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 0$$

   que está más cerca del origen.

   (c) Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide

   $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$$

   es $240/3\sqrt{3}$.

17. Hallar la distancia mínima desde el origen al cono

$$z^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2.$$

18. Encontrar tres números x, y, z tales que $x + y + z = 1$ y $xy + xz + yz$ sea tan grande como sea posible.

19. Encontrar el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.

20. Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}, \ \forall x, y, z \geq 0.$$

Sugerencia: Buscar el máximo de la función $u = xyz$ con la condición $x + y + z = c$.