Análisis II (C) Adicionales segundo parcial

1. Sea
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

   (a) Calcular, si existen, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ donde $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$, y $||v||=1$.

   (b) Estudiar la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$.

2. Calcular el valor de la derivada direccional de la función
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{yx^{1/3}+xy^{1/3}}{(x^2+(y-1)^2)^{1/6}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$
en el punto $(0,0)$ en la dirección $v=(\dfrac{-\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$.

3. Se tiene la función:
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{8x^3+y^3}{4x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

   (a) Hallar todos los $v\in\mathbb{R}$ de norma 1 para los cuales existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

   (b) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función $f(x,y)=y^2+e^{xy^2}\cos x$ y sea $C\subset\mathbb{R}^2$ la curva $\left\{x^3+\frac{4}{3}x+y=117\right\}$.

   (a) Demostrar que los únicos vectores v de norma 1 tales que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1)=2$ son $(0,1)$ y $(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$.

   (b) ¿Alguno de los dos vectores del ítem (a) es una dirección normal a la curva C? Justificar la respuesta.

5. Encontrar todas las rectas paralelas a $x-y=14$ que sean tangentes a la elipse $12x^2+18y^2=5$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que su matriz hessiana en el punto $(4,3)$ es $Hf(4,3) = \begin{pmatrix} 119 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Se define además la función $g(u,v) = f(v^2, u+v^2+v)$.

   Hallar el vector gradiente de la función $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ en el punto $(u,v) = (1,-2)$.

7. Se f una función de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ tal que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Si $x = 4u + 5v$ e $y = -5u + 4v$, calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$.

8. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. Sea $f(x,y) = u(x,y)e^{(ax+by)}$.

   Hallar valores de a y b (constantes) para que se cumpla la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} + f(x,y) = 0.$$

9. Dadas $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tales que $g(1,1) = 2, \nabla g(1,1) = (1,-2), Hg(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, y $h(1,1) = 0, \nabla h(1,1) = (-2,3), Hh(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, hallar el polinomio de Taylor de segundo orden alrededor del $(1,1)$ de la función $f(x,y) = g(x,y)e^{h(x,y)}$.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y sea $h(x,y) = \sin(f(x,y)) + e^{2x+3y}$.

    Sabiendo que $f(-3,2) = \dfrac{\pi}{2}$ y que $\nabla f(-3,2) = (5,3)$, hallar $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(-3,2)$.

11. Hallar la ecuación de todos los planos tangentes a la superficie $S : x^2 + y^2 + z^2 = 24$ que sean paralelos al plano $\Pi : 2x + 2y + 4z = 1$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = (x - y + z)^2 + (x + 2y)^2 - 3z^2 + x$. Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie de nivel de f que pasa por el punto $P = (0,1,1)$.

13. Calcular la derivada direccional máxima de $h = f \circ g$ en el punto $(1,1)$ si $z = f(u,v)$ está definida implícitamente por $z - u^2 + v^2 + \ln(v + z) = 0$ y $g(x,y) = (xy^2, y - x^2)$.

14. Sea $S \in \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la ecuación $(y - x)^3 + z^2 + yz + 18 = 0$. Hallar todos los puntos $P \in S$ tales que el plano tangente a S en P sea paralelo al plano $y - z = 0$.

15. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la ecuación $x \ln y - \sin z + xy^2 = 1$.

    (a) Hallar el plano tangente a S en el punto $(2, 1, \frac{\pi}{2})$.

(b) Mostrar, verificando las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, que a partir de la ecuación de S es posible despejar $y = g(x,z)$ en un entorno de $(2,1,\frac{\pi}{2})$. Hallar además el valor de $3\dfrac{\partial g}{\partial x}(2,\frac{\pi}{2}) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(2,\frac{\pi}{2}) - 2g(2,\frac{\pi}{2})$.

16. Sean $T(u,v) = (u-v, u+v)$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 tal que el único punto crítico de $f(x,y)$ es el $(1,1)$. Probar que $\Phi(u,v) = f \circ T(u,v)$ tiene un único punto crítico y hallarlo.

17. Hallar los puntos de la elipse $(x-y)^2+4(x+y)^2 = 80$ que tienen máxima coordenada y.

18. Hallar los extremos relativos de $f(x,y) = e^{(x^2-y^2)}$ restringida a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

19. (a) Hallar los extremos relativos, absolutos y puntos de ensilladura de $f(x,y) = e^{xy}$ en $D = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$.
    (b) Hallar los extremos absolutos en $\bar{D}$.

20. Hallar los extremos relativos y absolutos, si existen, de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^3+y^3+3x^2-3y$.

21. Hallar los extremos absolutos de:

    (a) $f(x,y) = x^2+y^2-x-y-1$ en la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 8x^2+8y^2 \leq 1\}$
    (b) $f(x,y) = x^2-y^2$ en la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2+x^2 \leq y \leq 4\}$.

22. Calcular la distancia máxima y mínima del punto $(0,\sqrt{3})$ a la elipse $x^2+\frac{y^2}{4} = 1$.

23. Decidir si es posible encontrar un número real a para el cual la función $f(x,y) = e^{x^2+ay}$ tenga un máximo relativo.

24. Si $x>0, y>0$ y $z>0$, probar que

$$xyz = 27 \Rightarrow x+y+z \geq 9.$$

25. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ la región definida por las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $x^2+\dfrac{y^2}{4} \leq 1$. Hallar el valor de

$$\iint_D e^{x^2+\frac{y^2}{4}}\,dx\;dy.$$

26. Calcular el volumen del sólido encerrado entre las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 1$.

27. Calcular

$$\iint_R 2e^{(x^2+y^2)}\, dx\ dy.$$

donde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

28. Sea $W \subset \mathbb{R}^2$ la región definida por:

$$x \geq -1, \quad y \geq 2 \quad \text{y} \quad (x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \leq 3.$$

Hallar el valor de

$$\iint_W x\, dx\ dy.$$

29. Sean D_1 y D_2 los discos en $\mathbb{R}^2$ centrados en el origen y de radios 1 y 2 respectivamente. Calcular el valor de la integral:

$$\iint_{D_1 - D_2} \ln\left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right) dx\ dy.$$

30. Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, x + y \geq 0\}$ calcular la integral doble

$$\iint_d \ln(x^2 + y^2)\, dx\ dy.$$

31. Sea $W \subset \mathbb{R}^2$ la región encerrada por $y = x$, $\quad y = -x$, $\quad y = -x + 2 \quad$ y $\quad y = x - 2$. Hallar el valor de

$$\frac{1}{64} \iint_W (x + y)^7 (x - y)^5\, dx\ dy.$$