

## Análisis II (C) - Práctica 1.

Primer cuatrimestre de 2003.

1. Calcular:

(a)  $\int \sin x \, dx$ .

(b)  $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$ .

(c) El área entre las curvas  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ .

2. Calcular:

(a)  $\int x \sin x \, dx$ . (b)  $\int \sin^2 x \cos x \, dx$ . (c)  $\int xe^{x^2} \, dx$ .

(d)  $\int e^x \sin x \, dx$ . (e)  $\int \frac{3x-2}{x^2+x-2} \, dx$ . (f)  $\int \ln x \, dx$ .

3. Hallar el área encerrada por las curvas:

(a)  $y = x^3$  e  $y = x$ .

(b)  $y = x^3 - x$  y la recta tangente a esta curva en  $x = -1$ .

4. (a) Para todos los valores reales de  $p > 0$ , estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

i.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx$     ii.  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \, dx$     iii.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx$

*Observación:* Dividir los valores de  $p$  de la siguiente manera:  $0 < p < 1$ ,  $p = 1$  y  $p > 1$ .

(b) Relacionar los resultados obtenidos con el hecho de que para  $x > 0$ ,  $x^{-p}$  y  $x^{-\frac{1}{p}}$  son funciones inversas y, por lo tanto, el gráfico de una es el de la otra reflejado respecto de la recta  $y = x$ .

5. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$     (b)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$     (c)  $\int_0^{+\infty} e^{-kx} \, dx$

(d)  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx$     (e)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$     (f)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

(g)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$     (h)  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} \, dx$     (i)  $\int_{-1}^3 \frac{dx}{(1-x)^3}$

(j)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + \cos x} \, dx$     (k)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x) \, dx$     (l)  $\int_0^4 \frac{x}{x^2-4} \, dx$

En los ítems (i), (k) y (l) estudiar, además, el valor principal.

6. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si  $f(x)$  es una función continua y positiva tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a > 0$ , entonces

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$$

(b) Si  $f(x)$  es una función continua y positiva tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a > 0$ , entonces

$$\int_0^{-\infty} f(x) dx = -\infty$$

(c) Si  $f(x)$  es una función continua y decreciente con  $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 3$ , entonces el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

(d) Si  $f(x)$  es una función continua y positiva con  $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 8$ , entonces el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

(e) Si  $f(x)$  es una función continua y positiva con  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , entonces

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty.$$