Análisis II (C) - Práctica 3.

Primer cuatrimestre de 2003.

1. (a) Analizar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos
   i. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$
   ii. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \geq 1\}$
   iii. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \quad \text{ó} \quad y \neq 0\}$

   (b) Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ que no sea ni abierto ni cerrado.

2. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, hallar ∂A, $\overline{A}$, $\overline{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$.

   (a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
   (b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \ \text{ y } \ z < 2\}$
   (c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 > \frac{1}{2}\}$

3. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son compactos:

   (a) $K_1 = B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
   (b) $K_2 = \overline{K_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
   (c) $K_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0\}$
   (d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$
   (e) $K_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad y = 0\}$

4. Usando sólo la definición de límite demostrar que:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} x + y = 1$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,8)} x.y = -8$

5. Probar que:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} x.e^{xy} = 0$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \operatorname{sen}(x\cos y) = 0$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}$ (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{x^2 - y^2} = 0$ con $a \neq 0$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0.$ Probar que:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\operatorname{sen}(f(x,y))}{f(x,y)} = 1$
   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{e^{f(x,y)} - 1}{f(x,y)} = 1$
   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\ln(f(x,y)) = 0$

7. Analizar la existencia de los límites direccionales y del límite global en $(0,0)$:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2 - x^2}{x^2 - y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$

e) $f(x,y) = |x|^y$

f) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

g) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

h) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}\ -1}$

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$

j) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{|x-y|}$

k) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

l) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{xy+y-x}$

m) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ \ln(x^2+y^2)$

n) $f(x,y) = x\ln\left(x^2+y^2\right)$

ñ) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$

o) $f(x,y) = \dfrac{e^{x(y+1)}-x-1}{|x-y|}$

8. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad xy \neq 1 \\ x^2y & \text{si} \quad xy = 1 \end{cases}$ en $(1,1)$ y $(-2,-1/2)$.

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x \neq 0 \quad \text{e} \quad y \neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$ en $(0,0)$ y $(1,1)$.

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-y^2} & \text{si} \quad |x| \neq |y| \\ 0 & \text{si} \quad |x| = |y| \end{cases}$ en $(1,-1)$ y $(0,0)$.

9. Probar que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x,y) = g(x)$, entonces f es continua en todo punto de la recta (a,y).

   Use esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

   (a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)$.

   (b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2) + e^y$.

10. Dada la función $f(x,y) = xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$

    (a) Calcular su dominio

    (b) Definirla, si es posible, en $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Dom}(f)$ de modo que resulte continua en todo $\mathbb{R}^2$.

11. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

    (a) $f(x,y) = \left(x^2,\ e^x\right)$.

    (b) $f(x,y) = \left(\dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\ ,\ \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right)$.

12. (a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1-\|x\|}$. Probar que f es continua y no es acotada.

    (b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Probar que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.