

Análisis II (C) - Práctica 6

Primer cuatrimestre de 2003

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:

$$(a) \int_{-1}^1 \left(\int_{-2}^2 y + 3 dy \right) dx, \quad \int_{-2}^2 \left(\int_{-1}^1 y + 3 dx \right) dy.$$

$$(b) \int_{-1}^2 \left(\int_4^5 x + 3 dy \right) dx, \quad \int_4^5 \left(\int_{-1}^2 x + 3 dx \right) dy.$$

2. Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int_Q x^2 y (2x + y + 1) dx dy, \quad \text{donde } Q = [-2, 3] \times [7, 8].$$

$$(b) \int_Q \cos^2 x \sin^2 y dx dy, \quad \text{donde } Q = [0, \pi] \times [0, \pi].$$

$$(c) \int_Q |x^2 - y^2| dx dy, \quad \text{donde } Q = [0, 1] \times [0, 1].$$

$$(d) \int_Q \sqrt{|x - y^2|} dx dy, \quad \text{donde } Q = [0, 4] \times [-1, 1].$$

3. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones determinadas por los límites de integración:

$$(a) \int_0^1 \int_1^{e^x} (x + y) dy dx.$$

$$(b) \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y dy dx.$$

$$(c) \int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx.$$

4. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, dibujar las regiones correspondientes y evaluar la integral por ambos caminos.

$$(a) \int_0^1 \int_x^1 xy dy dx.$$

$$(b) \int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y dy dx.$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \cos \theta dr d\theta.$$

5. (a) Sea D la región acotada por los semiejes positivos y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular

$$\int_D x^2 + y^2 dx dy.$$

(b) Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular

$$\int_D x^3 y dx dy.$$

6. Calcular el área de:

(a) la región limitada por la recta $y = x$ y por la curva $y = x^2$.

(b) la región formada por todos los puntos (x, y) tales que $|x| + |y| \leq a$, $a \geq 0$.

(c) la región formada por todos los puntos (x, y) tales que $x \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 2$, $x^2 + y^2 \geq 1$.

7. Calcular

- (a) $\int_C xyz + x^2y^2z^2 \, dx \, dy \, dz$, $C = [0, 1] \times [-3, 2] \times [-1, 1]$.
 (b) $\int_C x \cos z + y \cos x + z \cos y \, dx \, dy \, dz$, $C = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$.

8. Calcular

- (a) $\int_W x \, dx \, dy \, dz$, siendo W la región limitada por $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, $z = x^2 + y^2$.
 (b) $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dz \, dy \, dx$.
 (c) $\int_W x + y + z \, dx \, dy \, dz$, siendo $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \leq 1\}$.
9. (a) Sean $D^* = (0, 1] \times (0, 2\pi]$ y $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Determinar el conjunto imagen $D = T(D^*)$. Mostrar que T es inyectiva en D^* .
 (b) Sea D^* el paralelogramo acotado por las rectas $y = 3x - 4$, $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x$ e $y = \frac{1}{2}x + 2$. Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Encontrar una transformación T tal que $D = T(D^*)$.
10. (a) Sean $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ y $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Encontrar $D = T(D^*)$. ¿Es T inyectiva? ¿Conserva las áreas?.
 (b) Comprobar que la sustitución $x = u - uv$, $y = uv$ transforma el cuadrado unidad $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ en el triángulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$.

11. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi).$$

Sea $D^* = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Encontrar $T(D^*)$. ¿Es T inyectiva? Si no lo es, ¿se puede eliminar algún subconjunto de D^* de tal forma que T sea inyectiva en el resto?

12. Calcular los jacobianos de las transformaciones dadas en los tres ejercicios anteriores.

13. Considerar la aplicación lineal definida por: $u = y - x$, $v = x + y$.

- (a) Calcular su jacobiano.
 (b) Sea Δ el triángulo determinado por la recta $x + y = 2$ y los ejes coordenados. Estudiar y representar su imagen en el plano uv .
 (c) Calcular el área de Δ en el plano xy y de su imagen en el plano uv mediante integrales dobles.
 (d) Comparar los resultados obtenidos en el ítem anterior.
 (e) Calcular la siguiente integral mediante el cambio de coordenadas definido antes:

$$\int_{\Delta} e^{\frac{y-x}{y+x}} dx \, dy.$$

14. Sea $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- (a) Hallar D^* tal que $T(D^*) = D$, donde D es la región del primer cuadrante encerrada por los círculos $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ ($0 < a < b$).

- (b) Usar el ítem anterior para calcular $\int_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$.
15. Sea D el disco unitario de \mathbb{R}^2 . Calcular $\int_D e^{x^2+y^2} dx dy$ mediante un cambio de variables a coordenadas polares.
16. Calcular el volumen de:
- la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.
 - la región determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$, $z \geq 2$.
 - la región acotada por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$.
17. Verificar, usando integrales triples, que el volumen de la esfera de radio a es $\frac{4}{3}\pi a^3$.
18. (a) Mediante un cambio de variables conveniente, transformar la región $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ en la región $x^2 + y^2 \leq 1$.
- (b) Usando la parte anterior y el cambio a coordenadas polares, calcular el área de la elipse con semiejes a y b .
- (c) Calcular el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.
19. Aplicando la transformación $x + y = u$, $y = uv$, calcular

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy dx.$$

20. Calcular las siguientes integrales dobles

- $\int_D (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- $\int_D (x - y)^2 e^{x-y} dx dy$ donde D es el dominio acotado por las rectas $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - y = 1$ y $x - y = -1$.
- $\int_D (1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy$ donde D es el disco unitario.
- $\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} dx dy$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.

21. Calcular las siguientes integrales triples

- $\int_A z e^{x^2+y^2} dx dy dz$ donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3\}$.
- $\int_A \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.
- $\int_A z dx dy dz$ donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.