

PRÁCTICA 1

1. Calcular:

(a) $\int \sin x \, dx.$

(b) $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx.$

(c) El área entre las curvas $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$.

2. Calcular:

(a) $\int x \sin x \, dx.$ (b) $\int \sin^2 x \cos x \, dx.$ (c) $\int xe^{x^2} \, dx.$

(d) $\int e^x \sin x \, dx.$ (e) $\int \frac{3x-2}{x^2+x-2} \, dx.$ (f) $\int \ln x \, dx.$

3. Hallar el área encerrada por las curvas:

(a) $y = x^3$ e $y = x$.

(b) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a esta curva en $x = -1$.

4. (a) Para todos los valores reales de $p > 0$, estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

i. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx$ ii. $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \, dx$ iii. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx$

Observación: Dividir los valores de p de la siguiente manera:

$0 < p < 1$, $p = 1$ y $p > 1$.

(b) Relacionar los resultados obtenidos con el hecho de que para $x > 0$, x^{-p} y $x^{-\frac{1}{p}}$ son funciones inversas y, por lo tanto, el gráfico de una es el de la otra reflejado respecto de la recta $y = x$.

5. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ (b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\int_0^{+\infty} e^{-kx} \, dx$

(d) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx$ (e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

(g) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ (h) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} \, dx$ (i) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{(1-x)^3}$

(j) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + \cos x} \, dx$ (k) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x) \, dx$ (l) $\int_0^4 \frac{x}{x^2-4} \, dx$

En los ítems (i), (k) y (l) estudiar, además, el valor principal.

6. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a > 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$$

(b) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a > 0$, entonces

$$\int_0^{-\infty} f(x) dx = -\infty$$

(c) Si $f(x)$ es una función continua y decreciente con $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 3$, entonces el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(d) Si $f(x)$ es una función continua y positiva con $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 8$, entonces el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(e) Si $f(x)$ es una función continua y positiva con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty.$$