Práctica 2

1. Sean $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o un contraejemplo.

   (a) Si S_1 es convergente, entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ también es convergente y, además: $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cS_1$.

   (b) Si S_1 y S_2 son convergentes, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ es convergente y, además: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S_1 + S_2$.

   (c) Si $a_n \to 0$ entonces S_1 es convergente.

   (d) Si S_1 y S_2 son divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ es divergente.

   (e) Si $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n\geqslant 1}$ es creciente, entonces:

   i. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. ii. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ no converge.

2. Analizar la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + 3n - 1}{3n^3 + 4}$

3. (a) Usando la serie geómetrica, probar que las siguientes series son convergentes y hallar su suma:

   i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^{n-2}}$ ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$ iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-2} 5}{7^{8n+4}}$

   (b) Usando la serie geométrica o la telescópica probar que las siguientes series son convergentes y que su suma es la indicada:

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$ ii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$

iii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$ iv. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)} = 1$

v. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$ vi. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right]}{\ln(n^n)\ln\left[(n+1)^{n+1}\right]} = \frac{1}{\ln 4}$

vii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$ viii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1$

4. A una pelota se la deja caer desde una altura de 5 m. Cada vez que rebota salta a una altura de 3/4 partes de la distancia de la que cayó. Calcular la distancia total que recorre.

5. Determinar la convergencia o divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con los siguientes términos generales:

(a) $a_n = \dfrac{n+1}{2^n}$ (b) $a_n = \dfrac{3^n}{2^n n}$ (c) $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$

(d) $a_n = \dfrac{n!}{10^n}$ (e) $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$ (f) $a_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$

(g) $a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ (h) $a_n = \dfrac{3n-2}{4^n}$ (i) $a_n = \dfrac{n}{(2^n)!}$

(j) $a_n = \dfrac{(2n+3)^n}{(3n-2)^n}$ (k) $a_n = \dfrac{3^n-n^2}{7^n}$ (l) $a_n = \dfrac{n^3}{2^n+n^7}$

(m) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ (n) $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$ (ñ) $a_n = \dfrac{(3n^2+1)4^n}{n!}$

(o) $a_n = \dfrac{(5^n-n^2)n!}{2^n n^n}$ (p) $a_n = \dfrac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$ (q) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

6. **Criterio integral de Cauchy**

Dada $(a_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión decreciente de términos no negativos y sea $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función decreciente tal que $f(n) = a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que $\forall n > 1 :\quad a_n \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leqslant a_{n-1}$

(b) Deducir que $S_n - a_1 \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant S_{n-1}$

(c) Probar, usando (b), que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty.$$

7. Estudiar la convergencia de la serie *p-armónica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad (p \in \mathbb{R}).$$

8. Estudiar la convergencia de las series de término general:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{n\,(n^2+1)}}$ (b) $\dfrac{\ln\, n}{n}$ (c) $\dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$

(d) $\dfrac{2^n}{n.5^n}$ (e) $\dfrac{1}{\ln^k n}$ $(k \in \mathbb{N})$ (f) $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

(g) $\dfrac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ (h) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ (i) $\dfrac{n}{3n^2-3}$

(j) $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ (k) $\dfrac{2^n}{(n!)^5}$ (l) $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(m) $\dfrac{3n-1}{\sqrt{2^n}}$ (n) $\dfrac{n^3}{e^n}$ (o) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

9. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las series de término general:

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2}$ (b) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n}$ (c) $a_n = (-1)^n\dfrac{n^2-2n-1}{n!}$

(d) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ (e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$ (f) $a_n = (-1)^n \ln(\dfrac{n}{n+2})$

10. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar qué pasa en los extremos.

(a) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \cdots + \frac{x^n}{2^n} + \cdots$

(b) $x + x^4 + \cdots + x^{n^2} + \cdots$

(c) $3x + 3^4x^4 + 3^9x^9 + \cdots + 3^{n^2}x^{n^2} + \cdots$

(d) $\frac{x}{(1+\sqrt{1})} + \frac{x^2}{(2+\sqrt{2})} + \frac{x^3}{(3+\sqrt{3})} + \cdots$

(e) $x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{9x^3}{3!} + \cdots + \frac{n^2x^n}{n!} + \cdots$

(f) $\frac{(x-10)}{1.2} + \frac{(x-10)^2}{2.3} + \cdots + \frac{(x-10)^n}{n(n+1)} + \cdots$

(g) $(x+1) + 2!\,(x+1)^2 + \cdots + n!\,(x+1)^n + \cdots$

11. *El binomio de Newton*

Sea α un número real. Para cada número entero no negativo n, definimos

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(Observar que si $\alpha \in \mathbb{N},\ \alpha \geqslant n$, entonces $\binom{\alpha}{n}$ es el número combinatorio usual.)

(a) Probar que el polinomio de MacLaurin de orden m de la función $(1+x)^\alpha$ es

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

(b) Estudiar el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

(c) Calcular la serie de MacLaurin de (a) $\sqrt{1+x}$ (b) $\frac{1}{(1+x)^2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

12. (a) Calcular la serie de MacLaurin de las siguientes funciones:

(a) e^x (b) e^{x^2} (c) $\cos x$ (d) $\cosh x$ (e) $\sin x$ (f) $\sinh x$

Indicar en cada caso el radio de convergencia.

(b) Sin calcular las derivadas en $x = 0$, calcular la serie de MacLaurin de las siguientes funciones:

(a) $\frac{1}{1-x}$ (b) $\frac{1}{1+x}$ (c) $\frac{1}{1+x^2}$ (d) $\ln(1+x)$

(e) $\frac{1}{2+3x}$ (f) $\frac{1}{(2+x)(x+1)}$ (g) $\sqrt{1+x^3}$ (h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(i) $\cosh x$ (j) $\cos(2x)$ (k) $\cos(x^2)$ (l) $\cos^2 x$

Indicar en cada caso el radio de convergencia.

13. Probar que

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

para x en el intervalo de convergencia de la serie.

14. Usando el criterio de Leibniz para series alternadas, calcular los siguientes números reales con error menor que 10^{-4}:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$ (b) $\sin(10°)$.

15. Usando los desarrollos conocidos, calcular la serie de Taylor de

    (a) $\cos x$ centrada en $\pi/4$

    (b) $\frac{1}{x}$ centrada en $\frac{1}{3}$

    (c) $\ln x$ centrada en $\frac{1}{3}$

16. Calcular:
    (a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ con error menor que 0,001.
    (b) $\sqrt{2}$ con error menor que 0,0001 (usar que $\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{9}}$).
    (c) $\ln 2$ con error menor que 0,001 (usar que $\ln 2 = -\ln(1 - \frac{1}{2})$).
    (d) $\ln 10$ con error menor que 0,01 (usar que $\ln 10 = -\ln(\frac{1}{10})$).
    (e) $\ln(\frac{3}{2})$ con error menor que 0,01.

17. (a) Desarrollar en serie (indicando el radio de convergencia) la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 1$.
    (b) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ con error menor que $0,0001$.

18. Desarrollar $\arctan x$ en serie de Mac Laurin.

19. Calcular usando series alternadas
    (a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ con error $< 0,0001$.
    (b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x}\, dx$ con error $< 0,001$.
    (c) $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$ con error $< 0,0001$.
    (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{4x}\, dx$ con error $< 0,001$.