

PRÁCTICA 3

1. (a) Analizar si los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son abiertos
 - i. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$
 - ii. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \geq 1\}$
 - iii. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ ó } y \neq 0\}$
 (b) Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ que no sea ni abierto ni cerrado.

2. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, hallar ∂A , \bar{A} , $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$.
 - (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
 - (b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \text{ y } z < 2\}$
 - (c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ y } x^2 + y^2 > \frac{1}{2}\}$

3. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son compactos:
 - (a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
 - (b) $K_2 = \bar{K}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
 - (c) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$
 - (d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$
 - (e) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ y } y = 0\}$

4. Usando sólo la definición de límite demostrar que:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x + y = 1$	(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,8)} x \cdot y = -8$
--	--

5. Probar que:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x \cdot e^{xy} = 0$	(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \text{sen}(x \cos y) = 0$
(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}$	(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} \frac{\text{sen}(x^2 y)}{x^2 - y^2} = 0$ con $a \neq 0$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$. Probar que:
 - (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\text{sen}(f(x, y))}{f(x, y)} = 1$
 - (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{e^{f(x,y)} - 1}{f(x, y)} = 1$
 - (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \ln(f(x, y)) = 0$

7. Analizar la existencia de los límites direccionales y del límite global en $(0, 0)$:

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - x^2}{x^2 - y^2}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\text{d) } f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$$

$$\text{e) } f(x, y) = |x|^y$$

$$\text{f) } f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$\text{g) } f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

$$\text{h) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

$$\text{i) } f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x}$$

$$\text{j) } f(x, y) = \frac{\text{sen}(xy)}{|x - y|}$$

$$\text{k) } f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$$

$$\text{l) } f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{xy + y - x}$$

$$\text{m) } f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

$$\text{n) } f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$$

$$\text{ñ) } f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$$

$$\text{o) } f(x, y) = \frac{e^{x(y+1)} - x - 1}{|x - y|}$$

8. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

$$\text{(a) } f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy \neq 1 \\ x^2 y & \text{si } xy = 1 \end{cases} \quad \text{en } (1, 1) \text{ y } (-2, -1/2).$$

$$\text{(b) } f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{en } (0, 0) \text{ y } (1, 1).$$

$$\text{(c) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2} & \text{si } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{si } |x| = |y| \end{cases} \quad \text{en } (1, -1) \text{ y } (0, 0).$$

9. Probar que si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y) = g(x)$, entonces f es continua en todo punto de la recta (a, y) .

Use esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo \mathbb{R}^2 :

$$\text{(a) } f(x, y) = \text{sen}(x).$$

$$\text{(b) } f(x, y) = \text{sen}(x^2) + e^y.$$

10. Dada la función $f(x, y) = xy \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$

(a) Calcular su dominio

(b) Definirla, si es posible, en $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Dom}(f)$ de modo que resulte continua en todo \mathbb{R}^2 .

11. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$\text{(a) } f(x, y) = (x^2, e^x). \quad \text{(b) } f(x, y) = \left(\frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \frac{e^{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} \right).$$

12. (a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1 - \|x\|}$. Probar que f es continua y no es acotada.
- (b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Probar que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.