Práctica 5

1. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase C^2.

   (a) $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$ (b) $f(x,y,z) = e^zy + \dfrac{e^y}{x} + xy\ \sin z$

   (c) $f(x,y) = x^2e^{\frac{y}{x}} + y^2$

2. Determinar en cada caso si existe una función f que satisfaga las condiciones requeridas. Si existe alguna, encontrar todas.

   (a) $\nabla f(x,y) = (3x^2y + 2y^2, x^3 + 4xy - 1),\ f(1,1) = 4.$

   (b) $\nabla f(x,y) = (5y, 2x).$

   (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy} + xy\,e^{xy} + \cos x + 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2e^{xy}.$

   (d) $\nabla f(x,y,z) = (e^{y+z^2}, xe^{z^2} + \cos y, 2xze^ye^{z^2}),\ f(0,0,0) = 1.$

3. (a) Supongamos que f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ y que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0\ \forall (x,y).$

   Probar que $f(x,y) = g(x) + h(y).$

   (b) Sean f de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ y que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$

   i. Si llamamos $u = x + y$ y $v = x - y$, calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}.$

   ii. Probar que $f(x,y) = g(x+y) + h(x-y).$

4. (a) Hallar la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.

   i. $f(x,y) = (x+y)^2$ en $(0,0)$ ii. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0,0)$

   iii. $f(x,y) = e^x \sin y$ en $(2, \frac{\pi}{4})$ iv. $f(x,y) = \ln(1+xy)$ en $(2,3)$

   v. $f(x,y) = x + xy + 2y$ en $(1,1)$ vi. $f(x,y) = x^y$ en $(1,2)$

   (b) Utilizando los resultados anteriores evaluar $(0.95)^{2.01}$

   i. con error $\varepsilon < \frac{1}{500}$ ii. con error $\varepsilon < \frac{1}{5000}$

5. Hallar el polinomio de segundo grado que mejor aproxima, en el origen, a la función

$$f(x,y) = \sin x \sin y$$

6. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y verificar que son puntos de ensilladura:

   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$

   (c) $f(x,y) = xy$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

7. (a) Calcular los extremos de $f(x,y) = x^2+y^4$ y de $g(x,y) = x^4+y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.
   (b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

8. Sea $f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$. Probar que:
   (a) $\det(Hf(0,0)) = 0$
   (b) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$, esto es: si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a y b.
   (c) $(0,0)$ es un punto de ensilladura.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$:
   (a) Probar que $a = (0,0)$ es un punto crítico pero no extremo.
   (b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ son mínimos absolutos.
   (c) ¿Hay máximos relativos?.

10. Para las siguientes funciones, hallar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos, mínimos locales o puntos de ensilladura:
    (a) $f(x,y) = (2x+1-y)^2$
    (b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$
    (c) $f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 4xy + y^2$
    (d) $f(x,y) = \ln((x+y)^2 + (x+1)^2)$
    (e) $f(x) = \frac{1}{1+\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$
    (f) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
    (g) $f(x,y) = -3x^2 + 2xy + 2x - y^2 + y + 4$
    (h) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

11. Hallar los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:
    (a) $f(x,y) = xy(x-y)^2$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$
    (b) $f(x,y) = xy(x-y)^2$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$
    (c) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3\}$
    (d) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $\quad A = \mathbb{R}^2$
    (e) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$

12. (a) Hallar el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima.
    (b) Resolver el mismo problema reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

13. Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$$

dentro del círculo unitario y en el borde.

14. Encontrar los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas:
    (a) $f(x,y) = x - y + z \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2$

    (b) $f(x,y) = 2x - 2y - 3z \qquad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

    (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 3\sin x\,\cos x}{e^x} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0$

    (d) $f(x,y) = xy \qquad \frac{|xy|}{|xy|+1} \leqslant 1$

15. Resolver los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

    (a) Encontrar la distancia más corta desde el punto $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ hasta el plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 5$.

    (b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos

    $$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad \text{y} \qquad 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 0$$

    que está más cerca del origen.

    (c) Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide

    $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$$

    es $240/3\sqrt{3}$.

16. Hallar la distancia mínima desde el origen al cono

$$z^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2.$$

17. Encontrar tres números x, y, z tales que $x + y + z = 1$ y $xy + xz + yz$ sea tan grande como sea posible.

18. Encontrar el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.

19. Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}, \ \forall x, y, z \geqslant 0.$$

Sugerencia: Buscar el máximo de la función $u = xyz$ con la condición $x + y + z = c$.