

ANÁLISIS II
Computación

PRÁCTICA 2

1. Sean $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o un contraejemplo.

(a) Si S_1 es convergente, entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ también es

convergente y, además: $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cS_1$.

(b) Si S_1 y S_2 son convergentes, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente y,

además: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S_1 + S_2$.

(c) Si $a_n \rightarrow 0$ entonces S_1 es convergente.

(d) Si S_1 y S_2 son divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ es divergente.

(e) Si $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n \geq 1}$ es creciente, entonces:

- i. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. ii. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ no converge.

2. Analizar la convergencia de las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + 3n - 1}{3n^3 + 4}$$

3. (a) Usando la serie geométrica, probar que las siguientes series son convergentes y hallar su suma:

$$i. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^{n-2}} \quad ii. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}} \quad iii. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-25}}{7^{8n+4}}$$

- (b) Usando la serie geométrica o la telescópica probar que las siguientes series son

convergentes y que su suma es la indicada:

$$\text{i. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$$

$$\text{iii. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$$

$$\text{iv. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)} = 1$$

$$\text{v. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$$

$$\text{vi. } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) \right]}{\ln(n^n) \ln \left[(n+1)^{n+1} \right]} = \frac{1}{\ln 4}$$

$$\text{vii. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

$$\text{viii. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1$$

4. A una pelota se la deja caer desde una altura de 5 m. Cada vez que rebota salta a una altura de $3/4$ partes de la distancia de la que cayó. Calcular la distancia total que recorre.
5. Determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con los siguientes términos generales:

$$\text{(a) } a_n = \frac{n+1}{2^n}$$

$$\text{(b) } a_n = \frac{3^n}{2^n n}$$

$$\text{(c) } a_n = \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$$

$$\text{(d) } a_n = \frac{n!}{10^n}$$

$$\text{(e) } a_n = \frac{5^n}{n!}$$

$$\text{(f) } a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

$$\text{(g) } a_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$\text{(h) } a_n = \frac{3n-2}{4^n}$$

$$\text{(i) } a_n = \frac{n}{(2^n)!}$$

$$\text{(j) } a_n = \frac{(2n+3)^n}{(3n-2)^n}$$

$$\text{(k) } a_n = \frac{3^n - n^2}{7^n}$$

$$\text{(l) } a_n = \frac{n^3}{2^n + n^7}$$

$$\text{(m) } a_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$\text{(n) } a_n = \frac{n^2}{n!}$$

$$\text{(\tilde{n}) } a_n = \frac{(3n^2+1)4^n}{n!}$$

$$\text{(o) } a_n = \frac{(5^n - n^2)n!}{2^n n^n}$$

$$\text{(p) } a_n = \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$$

$$\text{(q) } a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

6. Criterio integral de Cauchy

Dada $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión decreciente de términos no negativos y sea $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente tal que $f(n) = a_n \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{(a) Probar que } \forall n > 1 : a_n \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq a_{n-1}$$

(b) Deducir que $S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_{n-1}$

(c) Probar, usando (b), que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty.$$

7. Estudiar la convergencia de la serie *p-armónica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p \in \mathbb{R}).$$

8. Estudiar la convergencia de las series de término general:

$$(a) \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \quad (b) \frac{\ln n}{n} \quad (c) \frac{2+(-1)^n}{n^2}$$

$$(d) \frac{2^n}{n \cdot 5^n} \quad (e) \frac{1}{\ln^k n} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (f) \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$$

$$(g) \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)} \quad (h) \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad (i) \frac{n}{3n^2-3}$$

$$(j) \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} \quad (k) \frac{2^n}{(n!)^5} \quad (l) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(m) \frac{3n-1}{\sqrt{2^n}} \quad (n) \frac{n^3}{e^n} \quad (o) \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

9. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las series de término general:

$$(a) a_n = \frac{(-1)^n}{2} \quad (b) a_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} \quad (c) a_n = (-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!}$$

$$(d) a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} \quad (e) a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \quad (f) a_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$$

10. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar qué pasa en los extremos.

$$(a) 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots$$

$$(b) x + x^4 + \dots + x^{n^2} + \dots$$

$$(c) 3x + 3^4 x^4 + 3^9 x^9 + \dots + 3^{n^2} x^{n^2} + \dots$$

$$(d) \frac{x}{(1+\sqrt{1})} + \frac{x^2}{(2+\sqrt{2})} + \frac{x^3}{(3+\sqrt{3})} + \dots$$

$$(e) x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{9x^3}{3!} + \dots + \frac{n^2 x^n}{n!} + \dots$$

$$(f) \frac{(x-10)}{1 \cdot 2} + \frac{(x-10)^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{(x-10)^n}{n(n+1)} + \dots$$

$$(g) (x+1) + 2!(x+1)^2 + \dots + n!(x+1)^n + \dots$$

11. *El binomio de Newton*

Sea α un número real. Para cada número entero no negativo n , definimos

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

(Observar que si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq n$, entonces $\binom{\alpha}{n}$ es el número combinatorio usual.)

(a) Probar que el polinomio de MacLaurin de orden m de la función $(1+x)^\alpha$ es

$$\sum_{n=0}^m \binom{\alpha}{n} x^n.$$

(b) Estudiar el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

(c) Calcular la serie de MacLaurin de (a) $\sqrt{1+x}$ (b) $\frac{1}{(1+x)^2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

12. (a) Calcular la serie de MacLaurin de las siguientes funciones:

(a) e^x (b) e^{x^2} (c) $\cos x$ (d) $\cosh x$ (e) $\sin x$ (f) $\sinh x$

Indicar en cada caso el radio de convergencia.

(b) Sin calcular las derivadas en $x = 0$, calcular la serie de MacLaurin de las siguientes funciones:

(a) $\frac{1}{1-x}$ (b) $\frac{1}{1+x}$ (c) $\frac{1}{1+x^2}$ (d) $\ln(1+x)$
 (e) $\frac{1}{2+3x}$ (f) $\frac{1}{(2+x)(x+1)}$ (g) $\sqrt{1+x^3}$ (h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 (i) $\cosh x$ (j) $\cos(2x)$ (k) $\cos(x^2)$ (l) $\cos^2 x$

Indicar en cada caso el radio de convergencia.

13. Probar que

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

para x en el intervalo de convergencia de la serie.

14. Usando el criterio de Leibniz para series alternadas, calcular los siguientes números reales con error menor que 10^{-4} :

(a) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ (b) $\sin(10^\circ)$.

15. Usando los desarrollos conocidos, calcular la serie de Taylor de

(a) $\cos x$ centrada en $\pi/4$

(b) $\frac{1}{x}$ centrada en $\frac{1}{3}$

(c) $\ln x$ centrada en $\frac{1}{3}$

16. Calcular:

(a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ con error menor que 0,001.

(b) $\sqrt{2}$ con error menor que 0,0001 (usar que $\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{9}}$).

(c) $\ln 2$ con error menor que 0,001 (usar que $\ln 2 = -\ln(1 - \frac{1}{2})$).

(d) $\ln 10$ con error menor que 0,01 (usar que $\ln 10 = -\ln(\frac{1}{10})$).

(e) $\ln(\frac{3}{2})$ con error menor que 0,01.

17. (a) Desarrollar en serie (indicando el radio de convergencia) la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 1$.

(b) Calcular $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ con error menor que 0,0001.

18. Desarrollar $\arctan x$ en serie de Mac Laurin.

19. Calcular usando series alternadas

(a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con error $< 0,0001$.

(b) $\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x} dx$ con error $< 0,001$.

(c) $\int_0^1 \cos(\sqrt{x}) dx$ con error $< 0,0001$.

(d) $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{4x} dx$ con error $< 0,001$.