

ANÁLISIS II
COMPUTACIÓNPRÁCTICA 3

1. a) Analizar si los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son abiertos

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$

2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \geq 1\}$

3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ ó } y \neq 0\}$

b) Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ que no sea ni abierto ni cerrado.

2. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, hallar ∂A , \bar{A} , $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$.

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \text{ y } z < 2\}$

c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ y } x^2 + y^2 > \frac{1}{2}\}$

3. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son compactos:

a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

b) $K_2 = \bar{K}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

c) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$

d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

e) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ y } y = 0\}$

4. Usando sólo la definición de límite demostrar que:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x + y = 1$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,8)} x \cdot y = -8$

5. Probar que:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x \cdot e^{xy} = 0$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \text{sen}(x \cos y) = 0$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} \frac{\text{sen}(x^2 y)}{x^2 - y^2} = 0$ con $a \neq 0$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$. Probar que:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\text{sen}(f(x,y))}{f(x,y)} = 1 \\
 b) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{e^{f(x,y)} - 1}{f(x,y)} = 1 \\
 c) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \ln(f(x,y)) = 0
 \end{aligned}$$

7. Analizar la existencia de los límites direccionales y del límite global en $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
 a) \quad f(x,y) &= \frac{x-y}{x+y} & b) \quad f(x,y) &= \frac{x^2y^2 - x^2}{x^2 - y^2} \\
 c) \quad f(x,y) &= \frac{xy}{x^2 + y^2} & d) \quad f(x,y) &= \frac{xy}{|x| + |y|} \\
 e) \quad f(x,y) &= |x|^y & f) \quad f(x,y) &= \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \\
 g) \quad f(x,y) &= \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} & h) \quad f(x,y) &= \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \\
 i) \quad f(x,y) &= \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x} & j) \quad f(x,y) &= \frac{\text{sen}(xy)}{|x-y|} \\
 k) \quad f(x,y) &= \frac{\text{sen}(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & l) \quad f(x,y) &= \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{xy + y - x} \\
 m) \quad f(x,y) &= (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) & n) \quad f(x,y) &= x \ln(x^2 + y^2) \\
 ñ) \quad f(x,y) &= (x^2 + y^2)^{x^2y^2} & o) \quad f(x,y) &= \frac{e^{x(y+1)} - x - 1}{|x-y|}
 \end{aligned}$$

8. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

$$\begin{aligned}
 a) \quad f(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } xy \neq 1 \\ x^2y & \text{si } xy = 1 \end{cases} \quad \text{en } (1,1) \text{ y } (-2, -1/2). \\
 b) \quad f(x,y) &= \begin{cases} x+y & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{en } (0,0) \text{ y } (1,1). \\
 c) \quad f(x,y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2} & \text{si } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{si } |x| = |y| \end{cases} \quad \text{en } (1,-1) \text{ y } (0,0).
 \end{aligned}$$

9. Probar que si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x,y) = g(x)$, entonces f es continua en todo punto de la recta (a,y) .

Use esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo \mathbb{R}^2 :

$$(a) \quad f(x, y) = \operatorname{sen}(x). \qquad (b) \quad f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2) + e^y.$$

10. Dada la función $f(x, y) = xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$

a) Calcular su dominio

b) Definirla, si es posible, en $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Dom}(f)$ de modo que resulte continua en todo \mathbb{R}^2 .

11. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$(a) \quad f(x, y) = (x^2, e^x). \qquad (b) \quad f(x, y) = \left(\frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \frac{e^{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} \right).$$

12. a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1 - \|x\|}$. Probar que f es continua y no es acotada.

b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Probar que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.