

PRÁCTICA 4

DERIVADAS PARCIALES

1. Calcular

(a) $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$ para $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$

(b) $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$ para $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln y$

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ para $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

2. Sean las funciones

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = |x| + |y|$$

Demostrar que en el origen

(a) f_1 es discontinua aunque existen las derivadas parciales.

(b) f_2 no admite derivadas parciales pero es continua.

3. Estudiar la continuidad y existencia de derivadas parciales de las siguientes funciones en el origen:

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(4 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

4. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones

$$(a) f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$$

$$(b) f(x, y, z) = ye^x + z$$

$$(c) f(x, y) = \sin x$$

$$(d) f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(e) f(x, y, z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1))$$

$$(f) f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$$

$$(g) f(x, y, z) = \cos(ye^{xy}) \sin x + \arctan z$$

$$(h) f(x, y) = \int_x^y e^{\sin t} dt$$

$$(i) f(x, y) = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt$$

$$(j) f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$(k) f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

DIFERENCIABILIDAD

5. (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2).$$

- i. Verificar que f es una transformación lineal, y calcular su matriz asociada.
- ii. Calcular la matriz de la diferencial $Df(x)$.
- iii. ¿Qué relación hay entre estas dos matrices?

(b) Mostrar que lo ocurrido en el ítem anterior vale para cualquier transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

6. Mostrar que

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable pero sus derivadas parciales son discontinuas.

7. Calcular $DF(x)$ para las siguientes funciones

$$(a) F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = (x, y)$$

- (b) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$
 (c) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$
 (d) $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $F(x) = \|x\|^2$

8. Estudiar la diferenciabilidad en el origen de las funciones del ejercicio 3.
 9. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican y escribir la ecuación del plano tangente cuando exista.

(a) $f(x, y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1, 5)$ y en $(2, 2)$.

(b) $f(x, y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ en $(0, 0)$ y en $(16, 1)$.

(c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ en (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.

(d) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 en $(0, 0)$ y en $(1, 0)$.

(e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 en $(0, 0)$ y en $(-1, 1)$.

10. Calcular el gradiente de f para

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(b) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

(c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

REGLA DE LA CADENA

11. Sean $f(u, v, w) = u^2 + v^3 + wu$ y $g(x, y) = x \operatorname{sen} y$. Dadas

$$u(t) = t^2 + 1; \quad v(t) = \operatorname{sen} t \quad w(t) = t - 1$$

y $x(t) = \operatorname{sen} t; \quad y(t) = t$ calcular

$$\frac{d}{dt}f(u(t), v(t), w(t)) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}g(x(t), y(t))$$

- (a) usando la regla de la cadena
 (b) sustituyendo

12. Sean $f(u, v) = e^{uv} \sin(u^2 + v^2)$, $g(u, v, w) = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$. Dadas $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = xy$, $w(x, y) = x - y + 1$, calcular las derivadas parciales de las funciones

- (a) usando la regla de la cadena
 (b) sustituyendo
13. Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$f(x_1, x_2) = (e^{x_1}, x_2, x_1 + x_2), \quad g(x_1, x_2, x_3) = (\sin(x_1 x_2), x_3),$$

y sea $F(x_1, x_2) = g(f(x_1, x_2))$. Calcular $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ $i, j = 1, 2$

- (a) usando la regla de la cadena
 (b) sustituyendo
14. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = \int_0^{2y} x^2 z + z^3 dz$

(b) $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} xy}{y} dy$

(c) $f(x) = \int_x^{x^2} e^{tx} dt$

15. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables y $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:
- (a) $\phi(x, y) = h(f(x)g(y), f(y)g(x))$
 (b) $\phi(x, y) = h(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$
 (c) $\phi(x, y) = h(x, h(x, y))$

APLICACIONES

16. Aproximar $(0, 99e^{0,02})^8$ usando la expresión del plano tangente de una función f adecuada.
17. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA 2 VARIABLES Demostrar que si f es una función diferenciable definida en algún abierto que contiene al segmento $P_1 P_2$, entonces vale que

$$f(P_1) - f(P_2) = \nabla f(P) \cdot (P_1 - P_2)$$

donde P es algún punto del segmento $P_1 P_2$, y el producto del segundo miembro es el producto escalar de vectores.

18. (a) Sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, donde B es una bola en \mathbb{R}^2 .
- Probar que si f es constante en B , entonces $\nabla f(x, y) = 0$, cualquiera sea $(x, y) \in B$.
 - Probar que si $\nabla f(x, y) = 0$ cualquiera sea $(x, y) \in B$, entonces f es constante en B .
- (b) Si $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables, y verifican que $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$ para todo $(x, y) \in B$, probar que entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = g(x, y) + c.$$

19. (a) COORDENADAS POLARES Dada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sean $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ y $g(r, \theta) = f(x, y)$. Calcular $\frac{\partial g}{\partial r}$ y $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f .
- (b) COORDENADAS ESFÉRICAS Dada $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sean $x = r \cos(\theta) \sin(\phi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$, $z = r \cos(\phi)$ y $g(r, \theta, \phi) = f(x, y, z)$ Calcular $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial g}{\partial \phi}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f .
- (c) COORDENADAS CILÍNDRICAS Dada $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sean $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ y $g(r, \theta, z) = f(x, y, z)$ Calcular $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f .

DERIVADAS DIRECCIONALES

20. Hallar las derivadas direccionales de f en el origen en cualquier dirección v , $\|v\| = 1$, siendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

21. Sea $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

- (a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

- (b) Mostrar que f es continua en $(0, 0)$.
 (c) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

22. Calcular la derivada direccional de f en x_0 en la dirección v siendo:

- (a) $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$ $x_0 = (1, 1)$ $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
 (b) $f(x, y) = x^4 + \ln(xy)$ $x_0 = (e, 1)$ $v = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$
 (c) $f(x, y, z) = e^z(xy + z^2)$ $x_0 = (0, 1, 0)$ $v = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
 (d) $f(x, y, z) = y + yz + zx$ $x_0 = (1, 1, 1)$ $v = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$
 (e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ $x_0 = (1, 1, 1)$ $v = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$
 (f) $f(x, y, z) = x^{yz}$ $x_0 = (e, e, 0)$ $v = (\frac{12}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13})$

Si f es diferenciable en x_0 , verificar que la derivada calculada coincide con $\nabla f \cdot v$.

23. Mostrar que el vector $v = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ es normal a la superficie $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en el punto $(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e interpretar este hecho geoméricamente.

24. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que la función definida por $h(x) = f(x)g(x)$ es diferenciable en x_0 y

$$\nabla h(x_0) = f(x_0)\nabla g(x_0) + g(x_0)\nabla f(x_0)$$

¿Qué relación existe entre la derivada direccional de h en x_0 en la dirección v ($\|v\| = 1$) y las derivadas direccionales de f y g en x_0 en la misma dirección?

25. Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados

(a) $x^{10}y - x \cos(z) + 7 = 0 \quad x_0 = (7, 0, 0)$

(b) $xy - z \ln(y) + e^{xy} = 1 \quad x_0 = (0, 1, 1)$

(c) $xy + ze^{xy} - z^2 = 0 \quad x_0 = (4, 0, 1)$

(d) $\cos(x) \cos(y)e^z = 0 \quad x_0 = (\pi/2, 1, 0)$

26. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0) y $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y, z) = f(x, y) - z$, ver qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de f en (x_0, y_0) y el plano tangente a una superficie de nivel de h en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

27. (a) Mostrar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.

(b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función $f(x, y) = 10 + 6 \cos(x) \cos(y) + 3 \cos(2x) + 4 \cos(3y)$. En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encontrar las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de temperatura.

28. El capitán Ralph se encontró en el lado soleado de Mercurio y notó que su traje espacial se fundía. La temperatura en un sistema rectangular de coordenadas cerca suyo viene dada por

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-zy} + e^{-3z}$$

Si él está ubicado en $(1, 1, 1)$ ¿En qué dirección deberá comenzar a moverse con el fin de enfriarse lo más rápido posible?

TEOREMAS DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA E INVERSA

29. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Probar que

$$\det(DF(x, y)) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

pero que F no es inyectiva.

30. Determinar si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase C^1 en el punto dado

(a) $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en $(x, y) \neq (0, 0)$

(b) $F(x, y) = (\sin x, \cos(xy))$ en $(\pi, \pi/2)$

31. Sea $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$. Demostrar que $f(x, y, z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y, z)$ en el punto $(1, 1, 1)$. Encontrar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$.

32. Hallar la solución $y = f(x, z)$ de $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ en un entorno de los siguientes puntos del plano xz (a) $(5, 10)$ (b) $(0, 64)$. Escribir explícitamente esos entornos.
33. Determinar las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones
- (a) $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$ $P = (2, 0)$
 (b) $g(x, y) = x^5 + y^5 + xy = 3$ $P = (1, 1)$
 (c) $h(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0$ $P = (0, 0, 2)$
34. Hallar los planos tangentes a la superficie $\mathcal{S} : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ que sean paralelos al plano $\Pi : x + 4y + 6z = 8$.

PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS

35. Calcular los vectores velocidad y rapidez de las siguientes curvas:
- (a) $\sigma(t) = (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t), 2t - t^2)$
 (b) $\sigma(t) = (\sin(2t), \ln(1 + t), t)$
 (c) $\sigma(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$
36. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente en los valores de t dados para las curvas
- (a) $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, e^2)$ $t = 1, t = 2$
 (b) $\sigma(t) = (t, t + 1, t^2 + 2)$ $t = 0, t = \frac{1}{2}$
 (c) $\sigma(t) = (t^2 \sin t, (t - 1)e^t, t)$ $t = 1, t = 8$
 (d) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ $t = 0, t = -1$
 (e) $\sigma(t) = (0, 0, t)$ $t = 1, t = -7$
37. Supongamos que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ hasta que se desprende súbitamente sobre una tangente en $t_0 = \pi$. ¿Dónde estará cuando $t = 4$?
38. Describir los siguientes conjuntos como trayectorias de curvas.
- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}$
 (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\}$
 (c) Una recta en \mathbb{R}^3 que pasa por el origen y el punto (a, b, c) .