

## ANÁLISIS II

## Computación

## PRÁCTICA 4

## DERIVADAS PARCIALES

1. Calcular

(a)  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$  para  $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$

(b)  $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$  para  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln y$

(c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  para  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

2. Sean las funciones

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = |x| + |y|$$

Demostrar que en el origen

(a)  $f_1$  es discontinua aunque existen las derivadas parciales.(b)  $f_2$  no admite derivadas parciales pero es continua.

3. Estudiar la continuidad y existencia de derivadas parciales de las siguientes funciones en el origen:

(a)  $f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$

(b)  $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(4 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(d)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

4. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones

$$(a) f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$$

$$(b) f(x, y, z) = ye^x + z$$

$$(c) f(x, y) = \sin x$$

$$(d) f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

#### DIFERENCIABILIDAD

5. (a) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2).$$

i. Verificar que  $f$  es una transformación lineal, y calcular su matriz asociada.

ii. Calcular la matriz de la diferencial  $Df(x)$ .

iii. ¿Qué relación hay entre estas dos matrices?

(b) Mostrar que lo ocurrido en el ítem anterior vale para cualquier transformación lineal  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

6. Mostrar que

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable pero sus derivadas parciales son discontinuas.

7. Calcular  $DF$  para las siguientes funciones

$$(a) F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = (x, y)$$

$$(b) F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$$

$$(c) F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$$

$$(d) F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x) = \|x\|^2$$

8. Estudiar la diferenciable en el origen de las funciones del ejercicio 3.

9. Estudiar la diferenciable de las siguientes funciones en los puntos que se indican y escribir la ecuación del plano tangente cuando exista.

$$(a) f(x, y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \text{ en } (1, 5) \text{ y en } (2, 2).$$

$$(b) f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} \text{ en } (0, 0) \text{ y en } (16, 1).$$

(c)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  en  $(x_0, y_0)$  con  $y_0 \neq 0$ .

(d)  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$   
 en  $(0, 0)$  y en  $(1, 0)$ .

(e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$   
 en  $(0, 0)$  y en  $(-1, 1)$ .

10. Calcular el gradiente de  $f$  para

(a)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(b)  $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

(c)  $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

#### REGLA DE LA CADENA

11. Sean  $f(u, v, w) = u^2 + v^3 + wu$  y  $g(x, y) = x \operatorname{sen} y$ . Dadas

$$u(t) = t^2 + 1; \quad v(t) = \operatorname{sen} t \quad w(t) = t - 1$$

y  $x(t) = \operatorname{sen} t; \quad y(t) = t$  calcular

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t), w(t)) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} g(x(t), y(t))$$

(a) usando la regla de la cadena

(b) sustituyendo

12. Sean  $f(u, v) = e^{uv} \sin(u^2 + v^2)$ ,  $g(u, v, w) = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$ . Dadas  $u(x, y) = x + y$ ,  $v(x, y) = xy$ ,  $w(x, y) = x - y + 1$ , calcular las derivadas parciales de las funciones

(a) usando la regla de la cadena

(b) sustituyendo

13. Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dadas por

$$f(x_1, x_2) = (e^{x_1}, x_2, x_1 + x_2), \quad g(x_1, x_2, x_3) = (\sin(x_1 x_2), x_3),$$

y sea  $F(x_1, x_2) = g(f(x_1, x_2))$ . Calcular  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$   $i, j = 1, 2$

(a) usando la regla de la cadena

(b) sustituyendo

14. Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivables y  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- (a)  $\phi(x, y) = h(f(x)g(y), f(y)g(x))$   
 (b)  $\phi(x, y) = h(x^y, y^x)$  con  $x, y > 0$   
 (c)  $\phi(x, y) = h(x, h(x, y))$

#### APLICACIONES

15. Aproximar  $(0, 99e^{0,02})^8$  usando la expresión del plano tangente de una función  $f$  adecuada.
16. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA 2 VARIABLES Demostrar que si  $f$  es una función diferenciable definida en algún abierto que contiene al segmento  $P_1P_2$ , entonces vale que

$$f(P_1) - f(P_2) = \nabla f(P) \cdot (P_1 - P_2)$$

donde  $P$  es algún punto del segmento  $P_1P_2$ , y el producto del segundo miembro es el producto escalar de vectores.

17. (a) Sea  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $B$  es una bola en  $\mathbb{R}^2$ .
- Probar que si  $f$  es constante en  $B$ , entonces  $\nabla f(x, y) = 0$ , cualquiera sea  $(x, y) \in B$ .
  - Probar que si  $\nabla f(x, y) = 0$  cualquiera sea  $(x, y) \in B$ , entonces  $f$  es constante en  $B$ . (*Sugerencia:* utilizar el Teorema de Valor Medio.)
- (b) Si  $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables, y verifican que  $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in B$ , probar que entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = g(x, y) + c.$$

18. (a) COORDENADAS POLARES Dada  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sean  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  y  $g(r, \theta) = f(x, y)$ . Calcular  $\frac{\partial g}{\partial r}$  y  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  imponiendo condiciones adecuadas de diferenciability sobre  $f$ .
- (b) COORDENADAS ESFÉRICAS Dada  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , sean  $x = r \cos(\theta) \sin(\phi)$ ,  $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$ ,  $z = r \cos(\phi)$  y  $g(r, \theta, \phi) = f(x, y, z)$  Calcular  $\frac{\partial g}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  y  $\frac{\partial g}{\partial \phi}$  imponiendo condiciones adecuadas de diferenciability sobre  $f$ .
- (c) COORDENADAS CILÍNDRICAS Dada  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , sean  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  y  $g(r, \theta, z) = f(x, y, z)$  Calcular  $\frac{\partial g}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  y  $\frac{\partial g}{\partial z}$  imponiendo condiciones adecuadas de diferenciability sobre  $f$ .

#### DERIVADAS DIRECCIONALES

19. Hallar las derivadas direccionales de  $f$  en el origen en cualquier dirección  $v$ ,  $\|v\| = 1$ , siendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

20. Sea  $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$ .

(a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

y que  $\pm e_1, \pm e_2$  son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

(b) Mostrar que  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

(c) ¿Es  $f$  diferenciable en  $(0, 0)$ ?

21. En cada caso calcular la derivada direccional de  $f$  en  $x_0$  en la dirección  $v$  y, si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , verificar que la derivada calculada coincide con  $\nabla f \cdot v$ :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f(x, y) = \sin(x) \cos(y) \quad x_0 = (1, 1) \quad v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \text{(b)} \quad & f(x, y) = x^4 + \ln(xy) \quad x_0 = (e, 1) \quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ \text{(c)} \quad & f(x, y, z) = y + yz + zx \quad x_0 = (1, 1, 1) \quad v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{aligned}$$

22. Mostrar que el vector  $v = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  es normal a la superficie  $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  en el punto  $(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  e interpretar este hecho geoméricamente.

23. Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Demostrar que la función definida por  $h(x) = f(x)g(x)$  es diferenciable en  $x_0$  y

$$\nabla h(x_0) = f(x_0)\nabla g(x_0) + g(x_0)\nabla f(x_0)$$

¿Qué relación existe entre la derivada direccionales de  $h$  en  $x_0$  en la dirección  $v$  ( $\|v\| = 1$ ) y las derivadas direccionales de  $f$  y  $g$  en  $x_0$  en la misma dirección?

24. Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x^{10}y - x \cos(z) + 7 = 0 \quad x_0 = (7, 0, 0) \\ \text{(b)} \quad & xy - z \ln(y) + e^{xy} = 1 \quad x_0 = (0, 1, 1) \\ \text{(c)} \quad & xy + ze^{xy} - z^2 = 0 \quad x_0 = (4, 0, 1) \\ \text{(d)} \quad & \cos(x) \cos(y)e^z = 0 \quad x_0 = (\pi/2, 1, 0) \end{aligned}$$

25. Dada una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $(x_0, y_0)$  y  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x, y, z) = f(x, y) - z$ , ver qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  y el plano tangente a una superficie de nivel de  $h$  en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

26. (a) Mostrar que si  $\nabla f(x_0) \neq 0$ , entonces  $-\nabla f(x_0)$  apunta en la dirección a lo largo de la cual  $f$  decrece más rápidamente.

(b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función  $f(x, y) = 10 + 6 \cos(x) \cos(y) + 3 \cos(2x) + 4 \cos(3y)$ . En el punto  $(\pi/3, \pi/3)$  encontrar las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de temperatura.

27. El capitán Ralph se encontró en el lado soleado de Mercurio y notó que su traje espacial se fundía. La temperatura en un sistema rectangular de coordenadas cerca suyo viene dada por

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-zy} + e^{-3z}$$

Si él está ubicado en  $(1, 1, 1)$  ¿En qué dirección deberá comenzar a moverse con el fin de enfriarse lo más rápido posible?

#### TEOREMAS DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA E INVERSA

28. Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ . Probar que

$$\det(DF(x, y)) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

pero que  $F$  no es inyectiva.

29. Determinar si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase  $C^1$  en el punto dado

(a)  $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  en  $(x, y) \neq (0, 0)$

(b)  $F(x, y) = (\sin x, \cos(xy))$  en  $(\pi, \pi/2)$

30. Sea  $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$ . Demostrar que  $f(x, y, z) = 0$  define una función implícita  $x = \varphi(y, z)$  en el punto  $(1, 1, 1)$ . Encontrar  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$ .

31. Hallar la solución  $y = f(x, z)$  de  $x^2 + y^2 - z^3 = 0$  en un entorno de los siguientes puntos del plano  $xz$ :

(a)  $(5, 10)$ ,

(b)  $(0, 64)$ .

Escribir explícitamente esos entornos.

32. Determinar las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones

(a)  $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$   $P = (2, 0)$

(b)  $g(x, y) = x^5 + y^5 + xy = 3$   $P = (1, 1)$

(c)  $h(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0$   $P = (0, 0, 2)$

33. Hallar los planos tangentes a la superficie  $\mathcal{S} : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  que sean paralelos al plano  $\Pi : x + 4y + 6z = 8$ .

#### PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS

34. Calcular los vectores velocidad y rapidez de las siguientes curvas:

(a)  $\sigma(t) = (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t), 2t - t^2)$

(b)  $\sigma(t) = (\sin(2t), \ln(1 + t), t)$

(c)  $\sigma(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$

35. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente en los valores de  $t$  dados para las curvas

- (a)  $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, e^2)$   $t = 1, t = 2$
- (b)  $\sigma(t) = (t, t + 1, t^2 + 2)$   $t = 0, t = \frac{1}{2}$
- (c)  $\sigma(t) = (t^2 \sin t, (t - 1) e^t, t)$   $t = 1, t = 8$
- (d)  $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$   $t = 0, t = -1$
- (e)  $\sigma(t) = (0, 0, t)$   $t = 1, t = -7$

36. Supongamos que una partícula sigue la trayectoria  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$  hasta que se desprende súbitamente sobre una tangente en  $t_0 = \pi$ . ¿Dónde estará cuando  $t = 4$ ?

37. Describir los siguientes conjuntos como trayectorias de curvas.

- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}$
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\}$
- (c) Una recta en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por el origen y el punto  $(a, b, c)$ .