

## ANÁLISIS II

## Computación

## PRÁCTICA 5

1. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase  $C^2$ .

$$(a) f(x, y) = x^3y + e^{xy^2} \qquad (b) f(x, y, z) = e^z y + \frac{e^y}{x} + xy \sin z$$

$$(c) f(x, y) = x^2 e^{\frac{y}{x}} + y^2$$

2. Determinar en cada caso si existe una función  $f$  que satisfaga las condiciones requeridas. Si existe alguna, encontrar todas.

$$(a) \nabla f(x, y) = (3x^2y + 2y^2, x^3 + 4xy - 1), \quad f(1, 1) = 4.$$

$$(b) \nabla f(x, y) = (5y, 2x).$$

$$(c) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{xy} + xy e^{xy} + \cos x + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 e^{xy}.$$

$$(d) \nabla f(x, y, z) = (e^{y+z^2}, xe^{z^2} + \cos y, 2xz e^y e^{z^2}), \quad f(0, 0, 0) = 1.$$

3. (a) Supongamos que  $f$  es de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}^2$  y que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y)$ .

Probar que  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ .

- (b) Sean  $f$  de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}^2$  y que  $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$ .

i. Si llamamos  $u = x + y$  y  $v = x - y$ , calcular  $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ .

ii. Probar que  $f(x, y) = g(x + y) + h(x - y)$ .

4. (a) Hallar la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.

$$i. \quad f(x, y) = (x + y)^2 \quad \text{en } (0, 0) \quad ii. \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \quad \text{en } (0, 0)$$

$$iii. \quad f(x, y) = e^x \sin y \quad \text{en } (2, \frac{\pi}{4}) \quad iv. \quad f(x, y) = \ln(1 + xy) \quad \text{en } (2, 3)$$

$$v. \quad f(x, y) = x + xy + 2y \quad \text{en } (1, 1) \quad vi. \quad f(x, y) = x^y \quad \text{en } (1, 2)$$

- (b) Utilizando los resultados anteriores evaluar  $(0.95)^{2.01}$

i. con error  $\varepsilon < \frac{1}{500}$       ii. con error  $\varepsilon < \frac{1}{5000}$

5. Hallar el polinomio de segundo grado que mejor aproxima, en el origen, a la función

$$f(x, y) = \sin x \sin y$$

6. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y verificar que son puntos de ensilladura:
- (a)  $f(x, y) = x^2 - y^2$                       (b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$
- (c)  $f(x, y) = xy$                               (d)  $f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$
7. (a) Calcular los extremos de  $f(x, y) = x^2 + y^4$  y de  $g(x, y) = x^4 + y^4$  y sus hessianos en dichos puntos.
- (b) Sea  $f$  de clase  $C^2$  tal que tiene un extremo estricto en  $a \in \mathbb{R}^n$ . ¿Es necesariamente  $Hf(a)$  definida positiva o negativa?
8. Sea  $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ . Probar que:
- (a)  $\det(Hf(0, 0)) = 0$
- (b)  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(0, 0)$  sobre cada recta que pase por  $(0, 0)$ , esto es: si  $g(t) = (at, bt)$  entonces  $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de  $a$  y  $b$ .
- (c)  $(0, 0)$  es un punto de ensilladura.
9. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ :
- (a) Probar que  $a = (0, 0)$  es un punto crítico pero no extremo.
- (b) Probar que  $\pm\sqrt{2}(1, -1)$  son mínimos absolutos.
- (c) ¿Hay máximos relativos?.
10. Para las siguientes funciones, hallar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos, mínimos locales o puntos de ensilladura:
- (a)  $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$                       (b)  $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$
- (c)  $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 4xy + y^2$                       (d)  $f(x, y) = \ln((x + y)^2 + (x + 1)^2)$
- (e)  $f(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$                       (f)  $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
- (g)  $f(x, y) = -3x^2 + 2xy + 2x - y^2 + y + 4$                       (h)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$
11. Hallar los extremos absolutos de  $f|_A$  en los siguientes casos:
- (a)  $f(x, y) = xy(x - y)^2$                        $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$
- (b)  $f(x, y) = xy(x - y)^2$                        $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$
- (c)  $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$                        $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$
- (d)  $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$                        $A = \mathbb{R}^2$
- (e)  $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$                        $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
12. (a) Hallar el punto de la parábola  $y^2 = 4x$  cuya distancia al  $(1, 0)$  es mínima.
- (b) Resolver el mismo problema reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

13. Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$$

dentro del círculo unitario y en el borde.

14. Encontrar los extremos de  $f$  sujetos a las restricciones mencionadas:

$$(a) f(x, y, z) = x - y + z \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$(b) f(x, y, z) = 2x - 2y - 3z \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

$$(c) f(x, y, z) = \frac{x^2 + 3 \sin x \cos x}{e^x} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$(d) f(x, y) = xy \quad \frac{2|xy|}{|xy|+1} \leq 1$$

15. Resolver los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

(a) Encontrar la distancia más corta desde el punto  $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$  hasta el plano de ecuación  $x_1 + x_2 - x_3 = 5$ .

(b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad \text{y} \quad 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 0$$

que está más cerca del origen.

(c) Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$$

es  $240/3\sqrt{3}$ .

16. Hallar la distancia mínima desde el origen al cono

$$z^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2.$$

17. Encontrar tres números  $x, y, z$  tales que  $x + y + z = 1$  y  $xy + xz + yz$  sea tan grande como sea posible.

18. Encontrar el punto de la superficie  $z = xy - 1$  más cercano al origen.

19. Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}, \quad \forall x, y, z \geq 0.$$

*Sugerencia:* Buscar el máximo de la función  $u = xyz$  con la condición  $x + y + z = c$ .