ANALISIS II

Computación

Práctica 6

---

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:

   (a) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{2} y+3\,dy\right)dx, \qquad \int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{1} y+3\,dx\right)dy.$

   (b) $\int_{-1}^{2}\left(\int_{4}^{5} x+3\,dy\right)dx, \qquad \int_{4}^{5}\left(\int_{-1}^{2} x+3\,dx\right)dy.$

2. Calcular las siguientes integrales:

   (a) $\int_Q x^2y(2x+y+1)\,dx\,dy,$ donde $Q=[-2,3]\times[7,8]$.

   (b) $\int_Q \cos^2 x\,\sin^2 y\,dx\,dy,$ donde $Q=[0,\pi]\times[0,\pi]$.

   (c) $\int_Q |x^2-y^2|\,dx\,dy,$ donde $Q=[0,1]\times[0,1]$.

   (d) $\int_Q \sqrt{|x-y^2|}\,dx\,dy,$ donde $Q=[0,4]\times[-1,1]$.

3. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones determinadas por los límites de integración:

   (a) $\int_0^1\int_1^{e^x}(x+y)\,dy\,dx.$

   (b) $\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} y\,dy\,dx.$

   (c) $\int_{-1}^1\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\,dy\,dx.$

4. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, dibujar las regiones correspondientes y evaluar la integral por ambos caminos.

   (a) $\int_0^1\int_x^1 xy\,dy\,dx.$

   (b) $\int_0^1\int_{2x}^{3x} x^2y\,dy\,dx.$

   (c) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\cos\theta\,dr\,d\theta.$

5. (a) Sea D la región acotada por los semiejes positivos y la recta $3x+4y=10$. Calcular
$$\int_D x^2+y^2\,dx\,dy.$$

   (b) Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x=-4y^2+3$. Calcular
$$\int_D x^3y\,dx\,dy.$$

6. Calcular el área de:

   (a) la región limitada por la recta $y=x$ y por la curva $y=x^2$.

(b) la región formada por todos los puntos (x, y) tales que $|x| + |y| \leqslant a,\ a \geqslant 0$.

(c) la región formada por todos los puntos (x, y) tales que $x \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 2,\ x^2 + y^2 \geqslant 1$.

7. Calcular

   (a) $\int_C xyz + x^2y^2z^2\ dx\, dy\, dz, \quad C = [0, 1] \times [-3, 2] \times [-1, 1]$.

   (b) $\int_C x \cos z + y \cos x + z \cos y\ dx\, dy\, dz, \quad C = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$.

8. Calcular

   (a) $\int_W x\, dx\, dy\, dz$, siendo W la región limitada por $x = 0,\ y = 0,\ z = 2,\ z = x^2+y^2$.

   (b) $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dz\, dy\, dx$.

   (c) $\int_W x + y + z\ dx\, dy\, dz$, siendo $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \leqslant 1\}$.

9. (a) Sean $D^* = (0, 1] \times (0, 2\pi]$ y $T(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. Determinar el conjunto imagen $D = T(D^*)$. Mostrar que T es inyectiva en D^*.

   (b) Sea D^* el paralelogramo acotado por las rectas $y = 3x - 4,\ y = 3x,\ y = \frac{1}{2}x$ e $y = \frac{1}{2}x + 2$. Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Encontrar una transformación T tal que $D = T(D^*)$.

10. (a) Sean $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ y $T : D^* \to \mathbb{R}^2,\ T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Encontrar $D = T(D^*)$. ¿Es T inyectiva? ¿Conserva las áreas?.

    (b) Comprobar que la sustitución $x = u - uv,\ y = uv$ transforma el cuadrado unidad $0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1$ en el triángulo $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x$.

11. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi).$$

    Sea $D^* = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Encontrar $T(D^*)$. ¿Es T inyectiva? Si no lo es, ¿se puede eliminar algún subconjunto de D^* de tal forma que T sea inyectiva en el resto?

12. Calcular los jacobianos de las transformaciones dadas en los tres ejercicios anteriores.

13. Considerar la aplicación lineal definida por: $u = y - x,\ v = x + y$.

    (a) Calcular su jacobiano.

    (b) Sea Δ el triángulo determinado por la recta $x + y = 2$ y los ejes coordenados. Estudiar y representar su imagen en el plano uv.

    (c) Calcular el área de Δ en el plano xy y de su imagen en el plano uv mediante integrales dobles.

    (d) Comparar los resultados obtenidos en el ítem anterior.

    (e) Calcular la siguiente integral mediante el cambio de coordenadas definido antes:

$$\int_\Delta e^{\frac{y-x}{y+x}} dx\, dy.$$

14. Sea $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

    (a) Hallar D^* tal que $T(D^*) = D$, donde D es la región del primer cuadrante encerrada por los círculos $x^2+y^2=a^2,\ x^2+y^2=b^2$ $(0<a<b)$.

    (b) Usar el ítem anterior para calcular $\int_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

15. Sea D el disco unitario de $\mathbb{R}^2$. Calcular $\int_D e^{x^2+y^2}dx\,dy$ mediante un cambio de variables a coordenadas polares.

16. Calcular el volumen de:

    (a) la región encerrada por la superficie $z=x^2+y^2$ y los planos $z=0$ y $z=10$.

    (b) la región determinada por $x^2+y^2+z^2 \leqslant 10,\ z \geqslant 2$.

    (c) la región acotada por $z=x^2+3y^2$ y $z=9-x^2$.

17. Verificar, usando integrales triples, que el volumen de la esfera de radio a es $\frac{4}{3}\pi a^3$.

18. (a) Mediante un cambio de variables conveniente, transformar la región $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ en la región $x^2+y^2 \leqslant 1$.

    (b) Usando la parte anterior y el cambio a coordenadas polares, calcular el área de la elipse con semiejes a y b.

    (c) Calcular el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

19. Aplicando la transformación $x+y=u,\ y=uv$, calcular

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\,dy\,dx.$$

20. Calcular las siguientes integrales dobles

    (a) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)^{3/2}dx\,dy$ donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leqslant 4\}$

    (b) $\displaystyle\int_D (x-y)^2 e^{x-y}dx\,dy$ donde D es el dominio acotado por las rectas: $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=1$ y $x-y=-1$

    (c) $\displaystyle\int_D (1+x^2+y^2)^{3/2}dx\,dy$ donde D es el disco unitario

    (d) $\displaystyle\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^3}dx\,dy$ donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\ ,\ x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0\}$

21. Calcular las siguientes integrales triples

    (a) $\displaystyle\int_A z e^{x^2+y^2}dx\,dy\,dz$ donde $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \leqslant 4\ ,\ 2 \leqslant z \leqslant 3\}$

    (b) $\displaystyle\int_A \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$ donde $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$

    (c) $\displaystyle\int_A z\ dx\,dy\,dz$ donde $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leqslant 3\ ,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$