Lista de temas para el examen final

El final puede incluir uno o más teoremas de esta lista, y puede incluir ejercicios.

Límite y continuidad

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y sea $s = \sup(A)$. Probar que existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} = s$.
2. Probar que toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.
3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en $P \in \mathbb{R}^2$. Si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = P$, probar que $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k) = f(P)$.
4. Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Probar que f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo valor.
5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que f es uniformemente continua.

Diferenciabilidad

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es continua en P.
2. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en el abierto U. Probar que f es diferenciable en U.
3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$. Probar que existe $f_v(P)$ y es igual a $\nabla f(P).v$
4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(P) \neq 0$. Probar que la dirección de máximo crecimiento está dada por $\nabla f(P)$.
5. Teorema del valor medio para funciones diferenciables.
6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ y P un extremo de f. Probar que $\nabla f(P) = 0$
7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^3 y P un punto crítico de f. Probar que
   - si el hessiano de f en P es definido positivo, entonces P es un mínimo relativo estricto de f.
   - si el hessiano de f en P es definido negativo, entonces P es un máximo relativo estricto de f.
   - si el hessiano de f en P es indefinido (o sea, no es ni definido positivo, ni definido negativo), entonces P es un punto silla de f.
8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$, donde g es diferenciable y $P \in S$. Si P es extremo de f restringido a S y $\nabla g(P) \neq 0$, probar que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$.

Integración

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, tal que
$$\sum_{i=1}^{n} \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$
2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que f es integrable sobre $[a, b]$.
3. Si f es acotada e integrable en $[a, b]$, $x \in (a, b)$, y
$$F(x) := \int_a^x f(t)dt,$$
entonces F es una función continua de $[a, b] \to \mathbb{R}$.
4. Teorema fundamental del cálculo: si f es continua en $[a, b]$, $x \in (a, b)$,
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$
5. Regla de Barrow: si f es continua en $[a, b]$, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función que satisface $F'(x) = f(x), x \in [a, b]$, entonces
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$
6. Teorema del valor medio para integrales: si f es continua en $[a, b]$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que,
$$\int_a^b f(t)dt = f(\xi)(b - a).$$
7. Enunciar y probar el criterio de la integral para series numéricas.
8. Analizar, para todo $p > 0$, la convergencia de las integrales
$$a) \int_0^1 \frac{1}{x^p}dx, \qquad b) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx.$$