

## ANÁLISIS II (COMPUTACIÓN)

## PRÁCTICA 1

## Preliminares

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

$$a) |x + 3| < 1 \qquad b) |3x - 1| < |x - 1| \qquad c) |x - 3| \geq 1$$

$$d) |x| > |x + 3| \qquad e) \left| \frac{x - 2}{3x + 1} \right| \leq 1$$

2. Representar los siguientes conjuntos en  $\mathbb{R}$ :

$$a) \{x : |x - 1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\} \qquad b) \{x : |x - 3| < |2 - x|\}$$

$$c) \{x : 0 < x^2 \leq x^3\}$$

3. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

$$a) A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| + |x - 9| > 2\};$$

$$b) B = \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - |x - 1|| < 1\};$$

$$c) C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}.$$

4. Sea  $a \geq 0$ . Determinar para qué valores de  $b$  se verifican cada una de las siguientes condiciones:

$$a) |a + b| = |a| + |b| \qquad b) |a + b| < |a| + |b|$$

$$c) |a - b| = |a| + |b| \qquad d) |a - b| < |a| + |b|$$

$$e) ||a| - |b|| = |a - b| \qquad f) ||a| - |b|| < |a - b|$$

5. Sean  $a$  y  $b$  números reales. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles no.

$$a) a < a^2 \qquad b) a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

$$c) a > 0 \Rightarrow ab \geq b. \qquad d) a + b \geq \max\{a, b\}$$

Indicar en cada caso, si es posible, para qué valores de  $a$  y de  $b$  son válidas las afirmaciones anteriores.

6. Sean  $0 \leq x \leq y$ . Probar que  $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$ .

7. a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:

- 1)  $\mathbb{R}_{>0}$ ;
- 2)  $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$ .

b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente:

- 1)  $\mathbb{Z}$ ;
- 2)  $\{x^{-1} : x < 0\}$ ;
- 3)  $\text{Im}(f)$  donde  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ .

8. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos, calcularlos:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\{n \in \mathbb{N} : 20 < n \leq 35\}$ | b) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$          |
| c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$    | d) $\{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$ |

9. a) Probar que el conjunto  $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$  no tiene máximo ni supremo en  $\mathbb{Q}$ .

b) Probar que el conjunto  $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$  no tiene mínimo ni ínfimo en  $\mathbb{Q}$ .

Sugerencia: en (a) mostrar explícitamente que, dado  $a \in A$ , existe un elemento mayor que  $a$  en  $A$  y en (b) proceder análogamente.

10. Calcular

- |  |  |
|--|--|
| a) $\sup \{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$     | b) $\sup \{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$ |
| c) $\inf \{(1 + \frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}\}$ | d) $\inf \{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$           |

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo):

- a) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$  entonces  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$  entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n > 0$  para todo  $n \geq n_0$ .
- c) Si  $a_n < 2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$ .
- d) Si  $a_n < 2 - \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$ .

12. Calcular  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$  y determinar, para cada  $\varepsilon > 0$  de la siguiente tabla, un valor  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  tal que  $|\frac{n+1}{n} - \ell| < \varepsilon$  si  $n > n_0$ .

$\varepsilon$	0,1	0,027	0,00001	$10^{-6}$
$n_0$				

13. Probar los siguientes límites:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  con  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  con  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ .

Sugerencia: Notar que, en ambos casos,  $a_n$  consta de una suma de  $n+1$  términos.

14. Sea  $a_n = \frac{4n-10}{n+1}$ .
- Encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se cumpla que  $3 < a_n < 5$ .
  - Encontrar  $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  y  $\min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .
15. Probar que toda sucesión convergente es acotada.
16. Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto acotado y sea  $s = \sup(A)$ . Probar que existe una sucesión  $a_n$  contenida en  $A$  que converge a  $s$ . Probar el resultado análogo para el ínfimo de  $A$ .
17. Sea  $a_n$  una sucesión monótona acotada. Probar que  $a_n$  es convergente.
18. (Aproximación de la raíz cuadrada de  $b > 0$ ) Considerar la sucesión definida de la siguiente manera:

$$a_1 = a > 0 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{b}{a_n} \right)$$

- Probar que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n$  es decreciente todo  $n \geq n_0$ .
- Probar que  $a_n$  está acotada inferiormente (ver ejercicio 10).
- Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{b}$ .

## Métricas y topología en $\mathbb{R}^n$

19. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en  $\mathbb{R}^2$ . Representar las soluciones en el plano.

- a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$                       b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| > 2\}$   
 c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$                       d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$   
 e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 3\}$                       f)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 1| \geq 1\}$   
 g)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} = 1\}$                       h)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} < 1\}$

20. Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , se define  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  y  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$

a) Mostrar que si  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que

- 1)  $|x_i| \leq \|x\|_2$ , si  $i = 1, \dots, n$ ;  
 2)  $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$ ;  
 3)  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$ . Describir geoméricamente esta doble desigualdad.

b) Usando lo hecho, concluir que:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n} \|x\|_\infty < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < r\}.$$

c) Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Mostrar la equivalencia de los siguientes dos enunciados:

- 1)  $A$  es abierto;  
 2) cualquiera sea  $y \in A$ , existe  $r > 0$  tal que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_\infty < r\} \subseteq A.$$

21. a) Mostrar que los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  son abiertos

- 1)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$ ;  
 2)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$ ;  
 3)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$ .

b) Dar un ejemplo de un conjunto en  $\mathbb{R}^3$  que no sea ni abierto ni cerrado.

22. Para cada uno de los siguientes conjuntos  $A \subset \mathbb{R}^3$ , calcular  $\partial A$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{A} \setminus A$  y  $A \setminus \partial A$ :

- a)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ;  
 b)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge z < 2\}$ ;  
 c)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$ ;  
 d)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 > 1/2\}$ .

23. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  son cerrados y acotados:

- a)  $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ ;  
 b)  $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;  
 c)  $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$ ;  
 d)  $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ;  
 e)  $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$ .

24. En cada uno de los siguientes casos, encuentre una sucesión de puntos de  $A$  que no posea ninguna subsucesión convergente a un punto de  $A$ :

- a)  $A = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ ;  
 b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$ .