ANALISIS II (Computación)

Práctica 2

Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

1. Dar el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y graficarlo:

   a) $f(x,y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$ *b*) $f(x,y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

   c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \sqrt{y - x^2}$ *d*) $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$

   e) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1 - y + x^2)}{\sin x}$ *f*) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \frac{1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$

   g) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$ *h*) $f(x,y) = \dfrac{\sin x^2 y}{\ln(1 - x^2)}$

2. Encontrar las curvas de nivel de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = x + y$ *b*) $f(x,y) = x^2 + y^2$

   c) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ *d*) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$

   e) $f(x,y) = x^2 - y^2$

3. Estudiar las superficies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x,y)$.

   a) $z = 2x^2 + y^2$ *b*) $z^2 = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{2}$ *c*) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

   d) $3x + 2y - z = 0$ *e*) $z = x^2y^2 + 1$ *f*) $z^2 = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3} - 2$

   g) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$ *h*) $z = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$, con $x > 0$

4. Encontrar las superficies de nivel de las siguientes funciones:

   a) $u = x + y + z$ *b*) $u = x^2 + y^2 - z^2$

   c) $u = x^2 + y^2 + z^2$ *d*) $u = x^2 + 2y^2$

Límite y continuidad

5. ¿A qué distancia de 16 basta tomar x para asegurar que:

   a) $\frac{1}{\sqrt{x}} \in (0, \frac{1}{2})$? *b)* $\frac{1}{\sqrt{x}} \in (\frac{1}{4} - \frac{1}{10}, \frac{1}{4} + \frac{1}{10})$? *c)* $\frac{1}{\sqrt{x}} \in (\frac{1}{4} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{4} + \frac{1}{1000})$?

6. Analizar la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ para cada $a \in \mathbb{R}$ siendo:

   a) $f(x) = x - [x]$. *b)* $f(x) = \frac{x}{[x]}$. *c)* $f(x) = |x| + [x]$.

   ($[x]$ denota la parte entera de x.)

7. Calcular, si existen, los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x + \cos x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9}$ *c)* $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin x$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{\ln|x|}$ *e)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$ *f)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$

   g) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{1/\tan x}$ *h)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ *i)* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$

8. *a)* Usando sólo la definición de límite demostrar que:
   1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} x + y = 1$;
   2) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,8)} xy = -8$.

   b) Si $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/100$ ó $\varepsilon = \alpha^2$, encontrar $\delta > 0$ tal que
   $$\|(x, y) - (-1, 8)\| < \delta \Longrightarrow |xy + 8| < \varepsilon.$$

9. Probar por definición que si $(x, y) \to (2, 3)$ entonces $y \operatorname{sen}(xy - 6) \to 0$.

10. Probar que:

    a) $\lim\limits_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39$; *b)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \sin(x \cos y) = 0$;

    c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy} = 0$; *d)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \frac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}$.

    e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} ye^x = 1$; *f)* $\lim\limits_{(x,y)\to(c,0)} \frac{\sin x^2 y}{x^2 - y^2} = 0$ si $c \neq 0$;

11. *a)* Sea $f : B_r(a, b) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = 0$. Probar que:
    $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\sin f(x, y)}{f(x, y)} = 1.$$

    b) Sea $f : B_r(a, b) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = +\infty$. Probar que:
    $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\ln f(x, y)}{f(x, y)} = 0.$$

12. Calcular:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$;

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

13. Analizar la existencia de los límites restringido a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

   a) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$;

   b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

   c) $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{y}$;

   d) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

   e) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{xy+y-x}$;

   f) $f(x,y)=|x|^y$;

   g) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$;

   h) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

   i) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-x^2+1}{x^2-y^2}$;

   j) $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$;

   k) $f(x,y)=\dfrac{xy}{|x|+|y|}$;

   l) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

   m) $f(x,y)=x\ln\left(x^2+y^2\right)$

   n) $f(x,y)=(x^2+y^2)\ \ln(x^2+y^2)$

   o) $f(x,y)=x\sin\dfrac{\pi}{y}+y\sin\dfrac{\pi}{x}$;

   p) $f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}$;

14. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si (x,y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$

   a) $f(x,y)=\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$;

   b) $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2-x}$;

   c) $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$;

   d) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y)y}{x^4}, & \text{si } 0<y<x^2;\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$

15. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4(x+1)}{|x+1|^3+2\,|y|^3} & (x,y)\neq(-1,0)\\ 1 & (x,y)=(-1,0)\end{cases}$$

   a) Probar que f no es continua en $(-1,0)$.

   b) Redefinirla en $(x,y)=(-1,0)$, si es posible, de manera tal que resulte continua en $\mathbb{R}^2$.

16. Consideremos la función
$$f(x,y) = x \cdot y \cdot \sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

   a) Calcular su dominio natural.

   b) Determinar si es posible extenderla a $\mathbb{R}^2$ de modo que resulte continua.

17. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,0)$;

   b) $f(x,y) = \begin{cases} |y|^x(1+x)^y, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \text{ y } x > -1; \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,2)$;

   c) $f(x,y) = \sin(x\cos y)$ en $(1,1)$ y $(0,2)$;

   d) $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0; \\ 1, & \text{en otro caso}; \end{cases}$ en $(0,0)$ y $(1,1)$;

   e) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } xy \neq 0; \\ 0, & \text{si } xy = 0; \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(-1,2)$.

18. Probar que la siguiente función no tiene límite cuando $(x,y) \to (0,0)$.
$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{|x-y|}$$

   Sugerencia: Mostrar antes que nada que si el límite existe debe valer cero. Después, calcular el dominio de f. Finalmente, elegir:

   - PLAN A: Encontrar alguna trayectoria que pase por el origen sobre la cual f no tienda a cero.
   - PLAN B: Considerar la sucesión de puntos $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$, probar que esta sucesión tiende a cero y calcular el $\lim_{n\to\infty} f(p_n)$.
   - PLAN C: Probar que debe existir un entorno del origen en donde f esté acotada. Mostrar que esto no puede ocurrir.

19. Analizar la existencia de límite en el origen para
$$f(x,y) = \frac{e^{(x^2+y^3)} - 1}{xy - x + y^2}$$

20. Probar que si $\|(x,y) - (1,0)\| < \frac{1}{2}$ entonces $(x-1)^2 + y^2|x| \geq \frac{1}{2}((x-1)^2 + y^2)$.

21. Estudiar la continuidad de f en el punto $(1,0)$.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2+y^2|x|} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

22. Estudiar la continuidad de f en el origen de coordenadas.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2-\tan(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

23. Demostrar que la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

24. Probar que si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en $x=a$ y la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está dada por $f(x,y)=g(x)$, entonces f es continua en todo punto de la recta (a,y). Usar esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

(a) $f(x,y)=\operatorname{sen}(x)$. (b) $f(x,y)=\operatorname{sen}(x^2)+e^y$.

25. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

(a) $f(x,y)=\left(x^2,\ e^x\right)$ (b) $f(x,y)=\left(\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right)$

26. *a*) Sea $f:B_1(0)\subset\mathbb{R}^2\to\ \mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{1}{1-\|x\|}$. Probar que f es continua y no es acotada.
b) Sea $g:B_1(0)\subset\mathbb{R}^2\to\ \mathbb{R}$ dada por $g(x)=\|x\|$. Probar que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.

27. Sea $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2y)}{\ln(1-x^2)}$

a) Encontrar el dominio D de f y grafíquelo.
b) Dado $q=(q_1,q_2)\in Fr(D)$. ¿Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(q_1,q_2)} f(x,y)$?

28. Definimos $F:\mathbb{R}^9\to\mathbb{R}$ como

$$F(x_1,x_2,...,x_9)=\det\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_4 & x_5 & x_6\\ x_7 & x_8 & x_9\end{pmatrix}.$$

a) Sea $a\in\mathbb{R}^9$. Mostrar que si $F(a)\neq 0$, entonces hay un entorno U de a tal que si $x\in U$ entonces $F(x)\neq 0$.
b) Concluir que si $a\in\mathbb{R}^9$ es tal que la matriz $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\\ a_7 & a_8 & a_9\end{pmatrix}$ es inversible, entonces existe un entorno U de a tal que si $x\in U$, la matriz $\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_4 & x_5 & x_6\\ x_7 & x_8 & x_9\end{pmatrix}$ también lo es.