ANALISIS II (Computación)

Práctica 3

Diferenciación
PRIMERA PARTE

1. Sea f una función que verifica $0 \leq f(x) \leq x^2$ para x en un intervalo abierto alrededor del origen. Probar que existe $f'(0)$ y calcular la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(0, f(0))$.

2. Sea f una función derivable en $x = a$. Probar que
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0.$$

3. Supongamos que f es una función continua en $x = a$ y que satisface
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \alpha - \beta(x-a)}{x-a} = 0.$$
Probar que f es derivable en $x = a$ y que $y = \alpha + \beta(x-a)$ es la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(a, f(a))$.

4. Consideremos la función $f(x) = x^2$ y la recta de ecuación $y = 9 + 4(x-3)$. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) - (9 + 4(x-3)) = 0$ pero que
$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - (9 + 4(x-3))}{x-3} \neq 0.$$
Meditar sobre la frase "la recta tangente es la mejor aproximación lineal".

5. Para cada una de las siguientes funciones f y g, calcular la derivada en $t = 0$ de la función compuesta $f \circ g$.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$	$g(t) = t(1,0) + (1,2)$	,	$g(t) = t(0,1) + (1,2)$
b) $f(x,y) = 2xy - 3x^2 + y - 5$	$g(t) = t(1,1) + (2,3)$	,	$g(t) = t(1,2) + (0,1)$
c) $f(x,y,z) = e^z(xy + z^2)$	$g(t) = t(0,1,0) + (1,1,2)$		
d) $f(x,y) = (x+1)\operatorname{sen} y - 2$	$g(t) = t(1,0) + (x_0, y_0)$	,	$g(t) = t(0,1) + (x_0, y_0)$
e) $f(x,y) = \|\|(x,y)\|\|$	$g(t) = t(a,b)$		

6. *a*) Sea $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ y $v = (1,1)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(2,1)$.

   b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$ para $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$

   c) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para $v = (a,b)$.

7. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$
   b) $f(x,y,z) = ye^x + z$
   c) $f(x,y) = x^2 \sin^2(y)$
   d) $f(x,y) = \sin x$
   e) $f(x,y,z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2+y^2+1))$
   f) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$
   g) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$

8. Probar que la función $f(x,y) = |x| + |y|$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

9. Consideremos la siguiente función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   Probar que las únicas direcciones $v \in \mathbb{R}^2$ para las que existe la derivada direccional f_v en el origen son $v = (1,0)$ y $v = (0,1)$. Probar, además, que la función no es continua en el origen.

10. Consideremos la siguiente función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

    Probar que f admite derivadas direccionales en el origen para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, f tampoco es continua en el origen.

11. Probar que si $v \in \mathbb{R}^2$ entonces $\dfrac{\partial f}{\partial(\alpha v)}$ es igual (si existe) a $\alpha \dfrac{\partial f}{\partial v}$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

12. Sea $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

    a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que
    $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$
    y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

    b) Mostrar que f es continua en $(0,0)$.

13. Graficar las siguientes curvas $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

    a) $\sigma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$
    b) $\sigma : [-1, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (1, 1, t)$
    d) $\sigma : [-1, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (1, 1, t^2)$
    e) $\sigma : [-3, 3] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (1, t^2, t)$
    f) $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = t(1,1,0) + (1-t)(1,0,5)$.

14. Graficar las siguientes curvas $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$.

    a) $\sigma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \cos(t))$.
    b) $\sigma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (\cos(2t), \text{sen}(2t))$.

15. Calcular la derivada de σ en $t = t_0$. Encontrar la ecuación de las rectas tangentes a la curva imagen de σ en $\sigma(t_0)$.

    a) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$, $\quad t_0 = 0$
    b) $\sigma(t) = (\cos^2(t), 3t - t^3, t)$, $\quad t_0 = 0$
    c) $\sigma(t) = (\text{sen}(3t), \cos(3t), 2t)$, $\quad t_0 = 1$

16. Encontrar curvas σ que representen los siguientes conjuntos o trayectorias.

a) $\{(x,y)/y = e^x\}$

b) $\{(x,y)/4x^2 + y^2 = 1\}$

c) $\{(x,y,z)/x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,\ z = x^2 + y^2,\ z \neq 0\}$

17. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ y las siguientes rectas de $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$g_1(t) = t(1,0) + (2,3), \qquad g_2(t) = t(0,1) + (2,3), \qquad g_3(t) = t(1,1) + (2,3).$$

a) Considerar la restricción de f a la imagen de cada una de las g_i. Mostrar que el gráfico de esta restricción es una curva de $\mathbb{R}^3$. Dar una parametrización $\sigma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \sigma_i(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de dicha curva.

b) Para cada $i = 1, 2, 3$, encontrar t_0 tal que $\sigma_i(t_0) = (2, 3, f(2,3))$. Calcular el vector tangente a la imagen de σ_i en $t = t_0$.

c) Sea $v = (v_1, v_2)$ el vector hallado en *b*) (uno para cada i). Probar que una ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva σ_i en $t = t_0$ es $\mathbb{L} : t(v_1, v_2, f_v(2,3)) + \sigma_i(t_0)$.

18. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $v = (a,b)$ y $\mathbb{L} : tv + (x_0, y_0)$. Supongamos además que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ Probar que una ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva

$$\sigma(t) = (ta + x_0, tb + y_0, f(ta + x_0, tb + y_0))$$

en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)))$ viene dada por

$$\mathbb{L} : t(a, b, f_v(x_0, y_0)) + (x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

19. Sea $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$

a) Encontrar ecuaciones paramétricas de las rectas tangentes a las siguientes curvas en $t_0 = 0$:

$$\sigma_1(t) = (t+1, 3, f(t+1, 3)) \quad \text{y} \quad \sigma_2(t) = (t+1, t+3, f(t+1, t+3)).$$

b) Encontrar la ecuación de un plano $z = T(x,y)$ que contenga ambas rectas y mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x,y) - z}{||(x,y) - (1,3)||} = 0.$$

20. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Probar que en el origen f es continua, admite todas las derivadas direccionales, pero que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + f(0,0))}{||(x,y)||} \neq 0.$$

21. Sea f diferenciable en $(1,2)$ tal que $f(1,2) = 3$. Se sabe que $f_{v_1}(1,2) = 3$, $f_{v_2}(1,2) = 4$ con $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (1,3)$.

a) Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(1, 2, f(1,2))$.

b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

22. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$. Probar que para cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ existe la derivada direccional $f_v(a)$ y que $f_v(a)$ es igual a $\nabla f(a) \cdot v$, donde $\cdot$ denota el producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^n$.

23. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

   a) $f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\left(4\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

   c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

24. Estudiar la existencia de plano tangente a las siguientes funciones en los puntos indicados. Si existe, escribir la ecuación.

   a) $f(x,y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1,5)$ y en $(2,2)$.

   b) $f(x,y) = x^{1/4}y^{1/4}$ en $(0,0)$ y en $(16,1)$.

   c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ en (x_0,y_0) con $y_0 \neq 0$.

   d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$ y en $(1,0)$.

   e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$ y en $(-1,1)$.

   f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3+x^2(y^2-6y+7)+(y-1)^2(6x+12-8y)}{x^2+2(y-1)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,1) \\ 2 & \text{si} \quad (x,y) = (0,1) \end{cases}$ en $(0,1)$.

25. *a*) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x,y) = (x+y, x-y, 2x+3y)$

   1) Verificar que T es una transformación lineal y calcular su matriz asociada (en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).

   2) Calcular la matriz de la diferencial $DT(a)$ para $a \in \mathbb{R}^2$. Verificar que es la misma matriz que la hallada en 1).

   b) A continuación consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

   1) Supongamos que T verifica
   $$\lim_{v \to \overrightarrow{0}} \frac{||Tv||}{||v||} = 0,$$
   donde $\overrightarrow{0}$ denota el vector nulo de $\mathbb{R}^m$. Probar entonces que T es la transformación lineal nula, es decir, para cada $w \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $T(w) = \overrightarrow{0}$. Sugerencia: considerar direcciones $v = tw$ con $t \in \mathbb{R}$.

   2) Asumiendo que T es diferenciable, deducir que para cada $a \in \mathbb{R}^n$ la diferencial $DT(a)$ es igual a T.

26. Usando la expresión
$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$$
para una función f adecuada, aproxime $\left(0,99e^{0,2}\right)^8$.

27. Para cada una de las siguientes funciones calcular $DF(a)$ para a en el dominio de F.

   a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, y)$
   b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$
   c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$
   d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x) = ||x||^2$

28. Calcular el gradiente de f para

   a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2$, *b*) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, *c*) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

29. Encuentre la dirección en que la función $z = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1, 1)$. ¿Cuál es la magnitud $||\nabla z||$ en esta dirección? Interpretar geométricamente esta magnitud.

30. Supongamos que la función $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición (x, y). Estamos parados en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano xy son iguales a $(1, 0)$ ¿En qué dirección deberíamos caminar para escalar más rápido?

31. *a*) Mostrar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.

   b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función
   $$f(x, y) = 10 + 6\cos(x)\cos(y) + 4\cos(3y)$$
   En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encontrar las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.