Ejercicios Adicionales

(Práctica 3)

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función.

i) Probar que f es continua si y sólo si valen las dos condiciones siguientes:

  (a) $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

  (b) $f^{-1}((-\infty, \beta))$ es abierto para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla (a) pero no cumpla (b).

Ejercicio 2. Sean S y T subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$. Sean $f_1 : S \to \mathbb{R}^m$ y $f_2 : T \to \mathbb{R}^m$ funciones continuas tales que $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in S \cap T$. Se define $f : S \cup T \to \mathbb{R}^m$ como

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in S \\ f_2(x) & \text{si } x \in T \end{cases}.$$

i) Demostrar que f es continua en todo punto.

ii) Analizar la validez de i) si no se supone que S y T sean cerrados.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua y sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

i) Demostrar que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

ii) Analizar la validez de la inclusión $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

Ejercicio 4. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y sea $f : S \to \mathbb{R}^m$ tal que la imagen de f es un conjunto acotado. Demostrar que f es continua si y sólo si para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ existe un compacto $\Gamma_K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(K) = \Gamma_K \cap S$.

Ejercicio 5. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que para toda función continua $f : S \to \mathbb{R}$ el conjunto $\mathrm{Im}(f)$ es un conjunto acotado. Demostrar que S es compacto.

Ejercicio 6. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto tal que $K \cap S = \emptyset$. Sea $f : K \cup S \to \mathbb{R}^m$ una función continua que es uniformemente continua sobre S. Demostrar que f es uniformemente continua sobre $K \cup S$.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y supongamos que $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que f es Lipschitz en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si cada $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es Lipschitz, para $i = 1, 2$.

Ejercicio 8. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado. Se define $\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$\Delta(x) = \min \{\| x - y \|, y \in S\}.$$

i) Demostrar que si $x, x' \in \mathbb{R}^n$ entonces $\Delta(x) \leq \Delta(x') + \| x - x' \|$.

ii) Demostrar que Δ es Lipschitz.

Ejercicio 9. Sean $n, s \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq s + 1$. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} x^n \cos\left(\dfrac{1}{x^s}\right) & \text{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Demostrar que f es Lipschitz.

Ejercicio 10.

i) Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función derivable. Probar que si f es Lipschitz entonces existe una constante $K > 0$ tal que $|f'(x)| \leq K$ para todo $x \in (a, +\infty)$.

ii) Demostrar que la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{x}$ no es Lipschitz en el intervalo $[1, +\infty)$.

Ejercicio 11. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Decidir si las afirmaciones son verdaderas o falsas (dando respectivamente una demostración o un contraejemplo):

i) Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz, entonces f^2 es Lipschitz.
(Nota: f^2 denota el producto, es decir, $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$ para cada $x \in S$.)

ii) Si $f : S \to [0, +\infty)$ es una función Lipschitz, entonces $\sqrt{f}$ es Lipschitz.

iii) Si $f, g : S \to \mathbb{R}$ son funciones Lipschitz, entonces $f + g$ es Lipschitz.

iv) Si $f : [a, b] \to (0, +\infty)$ es una función Lipschitz, entonces $\dfrac{1}{f(x)}$ es Lipschitz.

Ejercicio 12. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones y sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función producto (es decir, $h(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in [a, b]$). Estudiar la validez de las implicaciones:

i) Si f y g son Lipschitz $\Longrightarrow$ h es Lipschitz.

ii) Si h es Lipschitz $\Longrightarrow$ f es Lipschitz o g es Lipschitz.

Dar una demostración si la implicación es correcta o un contraejemplo debidamente justificado si es falsa.