Ejercicios Adicionales

(Práctica 4)

Ejercicio 1. Decidir si la integral $\int_0^3 x^2 \, d(\lceil x \rceil - x^3)$ existe y en caso afirmativo calcularla, siendo $\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \geq x\}$. Justificar.

Ejercicio 2. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$. Hallar todos los integradores $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ tales que $\int_0^1 f d\alpha$ exista. Justificar.

Ejercicio 3. Se sabe que f es una función continua y que la integral $\int_a^b f \, d\alpha$ existe. Sea $c \in (a,b)$ y sea $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\beta(x) = \alpha(x)$ si $x \neq c$.
Demostrar que $\int_a^b f \, d\beta$ existe y que vale $\int_a^b f \, d\beta = \int_a^b f \, d\alpha$.

Ejercicio 4. Se tienen las funciones siguientes definidas en el intervalo $[0,2]$:

$$f(x) = |x-1| \qquad\qquad \alpha(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = 0 \\ e^x & \text{si } x \in (0,2] \end{cases}$$

Demostrar que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ y hallar el valor de $\int_0^2 f \, d\alpha$.

Ejercicio 5. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que f es continua y α es monótona creciente. A partir de f y α se define una nueva función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente: $G(t) = \int_a^b (f - t) \, d\alpha$.

i) Demostrar que G está bien definida y que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $G(t_0) = 0$.

ii) Demostrar que existe algún $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f \, d\alpha = f(c)\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big)$.

iii) Suponiendo que α es además derivable en (a,b) (pero no necesariamente de clase $\mathcal{C}^1$), demostrar que la función

$$\psi(x) := \int_a^x f \, d\alpha$$

es derivable en (a,b) y que vale $\psi'(x) = f(x)\alpha'(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Ejercicio 6. Sean $f, \alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funciones que cumplen las condiciones:

- f es continua y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe y es finito.
- α es Lipschitz.

Se pide entonces:

i) Demostrar que para cada $x \in \mathbb{R}_{>0}$ existe la integral de Riemann-Stieltjes $\int\limits_0^x f \, d\alpha$.

ii) Demostrar que f es una función acotada.

iii) Si se define una nueva función $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente: $\psi(x) = \int\limits_0^x f \, d\alpha$, demostrar que ψ es Lipschitz.

Ejercicio 7. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Estudiar si f es una función de variación acotada. Justificar.

Ejercicio 8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición $\pi = \{x_0, ..., x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ se define $\pi(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mid f(x_k) - f(x_{k-1}) \mid$. Demostrar que f es de variación acotada si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ y una constante $M \in \mathbb{R}$, tal que $\pi(f) \leq M$ para toda partición de norma menor que ε.

Ejercicio 9. Analizar la validez de las afirmaciones siguientes (haciendo una demostración si la implicación es verdadera o exhibiendo un contraejemplo si la implicación es falsa; en caso de un " $\Leftrightarrow$ " analizar las dos implicaciones):

i) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada $\Rightarrow$ existen funciones monótonas crecientes y **estrictamente positivas** u y v tales que $f = u - v$.

ii) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada $\Leftrightarrow$ existen funciones monótonas crecientes u y v tales que $f = u + v$.

iii) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada $\Rightarrow$ existen funciones monótonas crecientes u y v tales que $f = u^2 - v^2$.

Nota: u^2 y v^2 denotan respectivamente las funciones $u(x).u(x)$ y $v(x).v(x)$.

Ejercicio 10. Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases} .$$

Demostrar que f es de variación acotada y hallar la función v_f.

Ejercicio 11. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ (es decir, g es derivable y g' es continua). Demostrar que $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada.

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} .$$

Demostrar que para todo $a \in (0, 1)$ la función f sobre el intervalo $[a, 1]$ es una función de variación acotada, pero f no es una función de variación acotada sobre el intervalo $[0, 1]$.