Práctica 1

Ejercicio 1. A partir de las siguientes propiedades de orden de los números reales:

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$, se tiene que $a < b$ ó $b < a$.
- Si $a < b$, entonces $\forall c$, $a + c < b + c$.
- Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < ab$.
- Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

Mostrar los siguientes hechos:

i) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

ii) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.

iii) Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$.

iv) Si $x^2 + y^2 = 0$, entonces se tiene que $x = y = 0$.

Ejercicio 2. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Probar que son equivalentes las siguientes definiciones alternativas del supremo de A.

1. s verifica que:

   i) $\forall a \in A$ se tiene $s \geq a$;
   ii) si $t \geq a$ para todo $a \in A$, entonces $t \geq s$.

2. s verifica que:

   i) $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
   ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.

3. s verifica que:

   i) $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
   ii) existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida A tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = s$.

Enunciar y demostrar equivalencias análogas para el ínfimo.

Ejercicio 3. Sean A, $B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$.

i) Suponiendo que A y B están acotados superior e inferiormente, establecer y demostrar las relaciones de orden entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$, $\inf(B)$.

ii) ¿Qué sucede cuando A o B no está acotado superior o inferiormente?

Ejercicio 4. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

i) $A_1 = (a, b]$

ii) $A_2 = \left\{ \dfrac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

iii) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$

iv) $A_4 = \left\{ x \in \mathbb{Q}\ : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \right\}$

v) $A_5 = \left\{ x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R} \right\}$

vi) $A_6 = \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

vii) $A_7 = \left\{ x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4) \right\}$

Ejercicio 5. Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío se definen, para cada $c \in \mathbb{R}$, $c.A = \{c.x : x \in A\}$ y $-A = (-1).A$.

i) Probar que si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente y vale $\inf(-A) = -\sup A$.

ii) Probar que si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces $c.A$ también lo está y $\sup(c.A) = c \sup A$.

iii) ¿Qué se puede decir en el caso que $c < 0$?

iv) Enunciar y probar resultados análogos a los anteriores para $\inf(c.A)$.

Ejercicio 6. Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ambos no vacíos se definen

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
$$A.B := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

i) ¿Qué condiciones deben verificar A y B para que exista $\sup(A + B)$? Estudiar la relación entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$.

ii) ¿Es posible dar resultados parecidos a los de la parte i) para $A.B$ y los números $\sup(A.B)$ y $\sup(A). \sup(B)$? ¿Cuáles?

Ejercicio 7. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $|c| < 1$. Analizar la existencia de $\lim\limits_{n\to\infty} c^n$.

Ejercicio 8. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

i) Probar que:

   (a) Si $r < L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r\ \forall n \geq n_0$.

   (b) Si $r > L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r\ \forall n \geq n_0$.

ii) ¿Puede reformularse i)(a) si se sabe que $r \leq L$?

iii) ¿Qué puede decirse de L si se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r\ \forall n \geq n_0$?

Ejercicio 9. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

Ejercicio 10. Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un número $\alpha \in \mathbb{R}$, se dice que α es un *punto límite de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$. Hallar los puntos límites de las sucesiones:

i) $1 - \dfrac{1}{n}$ ii) $(-1)^n$ iii) $\cos(\dfrac{n\pi}{2})$

iv) $(-1)^n(2 + \dfrac{3}{n})$ v) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots$ vi) $\dfrac{n + (-1)^n(2n+1)}{n}$

Ejercicio 11. Hallar los límites superior e inferior de las sucesiones del ejercicio anterior.

Ejercicio 12. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales que converge a 0 y sea $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las medias aritméticas (promedios) definida como $\sigma_n := \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.
Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Ejercicio 13. Se tienen sucesiones acotadas de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Enunciar y demostrar las relaciones de orden entre los cuatro números que siguen:

- $\liminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
- $\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
- $\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$
- $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$.