Práctica 2

Ejercicio 1. Una función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una *norma* en $\mathbb{R}^n$ si verifica:

- $N(v) = 0 \iff v = (0, \dots, 0)$.
- $N(\alpha v) = \mid \alpha \mid N(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Sean

$$\| (x_1, \dots, x_n) \|_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid \qquad \text{y} \qquad \| (x_1, \dots, x_n) \|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid .$$

Demostrar que las funciones $\| * \|_1$ y $\| * \|_\infty$ son normas.

Ejercicio 2. Una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una *distancia* en $\mathbb{R}^n$ si verifica:

- $d(v, w) = 0 \iff v = w$.
- $d(v, w) = d(w, v)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.
- $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$ para todo $v, w, u \in \mathbb{R}^n$.

i) Demostrar que si N es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces $d(v, w) := N(v - w)$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

ii) Demostrar que si d es una distancia arbitraria en $\mathbb{R}^n$, entonces $D(v, w) := \dfrac{d(v, w)}{1 + d(v, w)}$ también es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

Sugerencia: Considerar la función monótona creciente $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$.

Observar que la distancia D tiene la propiedad que $D(v, w) < 1$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.

iii) Para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ y cada $r \in \mathbb{R}_{>0}$ se define la bola con centro p y radio r con respecto a la distancia D de la manera natural:

$$B_D(p, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, D(x, p) < r\}.$$

¿Qué subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es $B_D(p, 1)$? ¿Y $B_D(p, 2)$? Observar entonces que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es acotado para esta distancia.

iii) Supongamos ahora que d es la distancia usual en $\mathbb{R}^2$ y D es la distancia definida en ii).

(a) Dibujar la bola $B_D\big((0, 0), \frac{1}{2}\big)$.

(b) Sea $p \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$B(p, r_1) \subseteq B_D(p, \varepsilon) \qquad \text{y} \qquad B_D(p, r_2) \subseteq B(p, \varepsilon)$$

donde $B(p, r)$ denota la bola de centro p y radio r para la distancia euclídea usual. Esto muestra en particular que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es abierto para la distancia euclídea usual si y sólo si es abierto para la distancia D, a pesar de que todo conjunto es acotado con esta última.

Ejercicio 3. Estudiar cuáles propiedades (abierto, cerrado, acotado) verifica cada uno de los conjuntos siguientes:

i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 1\}$ ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = y\}$

iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy > 0\}$ iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$

v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, xy > z\}$

Ejercicio 4. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar las propiedades siguientes:

i) $S^\circ = \{p \in \mathbb{R}^n \,/\, \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(p, \varepsilon) \subseteq S\}$.

ii) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.

iii) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?

iv) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?

v) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?

vi) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?

vii) $(\mathbb{R}^n - S)^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{S}$.

Ejercicio 5. En cada uno de los siguientes casos hallar S°, $\overline{S}$ y ∂S.

i) $S = [0, 1]$ ii) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ iii) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$

iv) $S = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ v) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vi) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

Ejercicio 6. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

i) Demostrar que S es abierto si y sólo si es disjunto con ∂S.

ii) Demostrar que S es cerrado si y sólo si $\partial S \subset S$.

Ejercicio 7. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Demostrar que $p \in \partial S$ si y sólo si todo entorno de p contiene un punto en S y un punto que no está en S.

Ejercicio 8. Estudiar la convergencia en $\mathbb{R}^2$ de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por $a_n = \left(n, \frac{1}{n}\right)$ y $b_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Ejercicio 9. Para cada $S \subset \mathbb{R}^n$ notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

i) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del ejercicio 5.

ii) Un punto $p \in S$ se llama un *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

Ejercicio 10. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \,/\, n, m \in \mathbb{N} \right\}$. Hallar la adherencia $\overline{S}$.

Ejercicio 11. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

Ejercicio 12. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se llama *conexo* si para todo par de conjuntos abiertos $G, H \subset \mathbb{R}^n$ tales que

- $S = (S \cap G) \cup (S \cap H)$
- $S \cap G \cap H = \emptyset$

vale que $S \subset G$ o $S \subset H$.

i) Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es conexo. ¿Qué ocurre con $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$? ¿Y con $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$?

ii) ¿Es $\mathbb{R}$ conexo? (cf. ejercicio 11)

iii) Demostrar que el intervalo $[0, 1]$ es conexo.

iv) Decidir si los conjuntos del ejercicio 3 son conexos o no.

v) Demostrar que un conjunto abierto y conexo $S \subset \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad de que dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse mediante una línea poligonal totalmente contenida en S.

Sugerencia: Dado $p \in S$ arbitrario considerar los conjuntos

$G := \{x \in S \,/ x \text{ se une a } p \text{ con una poligonal contenida en } S\}$ y $H := S - G$.

Ejercicio 13. Sean S y T conjuntos conexos de $\mathbb{R}^2$.

i) ¿Es $S \cap T$ necesariamente conexo?

ii) ¿Es $S \cup T$ necesariamente conexo? Si la respuesta es negativa, dar una condición (no trivial) que garantice que $S \cup T$ sea conexo.

Ejercicio 14. Se realiza la siguiente construcción recursiva en $\mathbb{R}^2$: partiendo del origen, se dibuja una línea Γ_0 de una unidad hacia la derecha, desde el nuevo extremo de Γ_0 se dibuja otra línea Γ_1 de $1/2$ unidad hacia arriba, desde el nuevo extremo de Γ_1 se traza otra línea Γ_2 de $1/4$ de unidad a la derecha, luego Γ_3 de $1/8$ de unidad hacia arriba, Γ_4 de $1/16$ de unidad a la derecha y así sucesivamente.

i) Estudiar la convergencia de la sucesión de vértices de esta "poligonal".

ii) Hallar $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma_n}$.

Ejercicio 15. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $\Im_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$.

i) Demostrar que $(0,1) = \bigcup_{n\geq 2} \Im_n$.

ii) ¿Existe un conjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0,1) = \bigcup_{n\in\mathcal{F}} \Im_n$? Justificar.

iii) ¿Qué puede decirse sobre la compacidad del conjunto $(0,1)$?

Ejercicio 16. Sea $U_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \parallel (x,y) - (0,n) \parallel < n\}$. Demostrar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.

Ejercicio 17. Demostrar que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

Ejercicio 18. Sean $S, T \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son conjuntos compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

Ejercicio 19. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $p \in \mathbb{R}^n$. Se define la *distancia entre p y S* como

$$d(p,S) := \inf\{\parallel p - x \parallel / x \in S\}.$$

i) Demostrar que $|d(p,S) - d(q,S)| \leq d(p,q)$ para todo $p, q \in \mathbb{R}^n$.

ii) Hallar todos los $p \in \mathbb{R}^n$ tales que $d(p,S) = 0$.

iii) Demostrar que si S es cerrado la distancia entre un punto p y el conjunto S se realiza, es decir, existe $q \in S$ tal que $d(p,S) = \parallel p - q \parallel$.

iv) Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ y sea $G = \{v \in \mathbb{R}^n / d(v,S) < \varepsilon\}$. Demostrar que G es abierto.

Ejercicio 20. Sean $S, T \subset \mathbb{R}^n$. Se define la *distancia entre S y T* como

$$d(S,T) = \inf\{\parallel x - y \parallel / x \in S, y \in T\}.$$

i) ¿Es cierto que $d(S,T) = \inf\{d(p,T) \ / \ p \in S\}$?

ii) Mostrar que no siempre existen $p \in S$ y $q \in T$ tales que $d(S,T) = \parallel p - q \parallel$(cf. ejercicio 19 parte ii)).

iii) ¿Qué ocurre con la pregunta anterior si S y T son compactos? ¿Y si los dos son cerrados? ¿Y si uno es compacto y el otro cerrado no acotado?

Ejercicio 21. Sea $S = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \ / \ n, m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ (cf. ejercicio 5 de la Práctica 1). Demostrar que los puntos de acumulación de S son los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ y el 0. ¿El conjunto $S \cup \{0\}$ es compacto?