Práctica 3

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ y $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Decidir en cada caso si corresponde $\subset, \supset$ ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{rccc}
\text{i)} & f(A \cup B) & \ldots\ldots & f(A) \cup f(B) \\
\text{ii)} & f^{-1}(X \cup Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
\text{iii)} & f(A \cap B) & \ldots\ldots & f(A) \cap f(B) \\
\text{iv)} & f^{-1}(X \cap Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
\text{v)} & f(\mathbb{R}^n - A) & \ldots\ldots & \mathbb{R}^m - f(A) \\
\text{vi)} & f^{-1}(\mathbb{R}^m - X) & \ldots\ldots & \mathbb{R}^n - f^{-1}(X)
\end{array}$$

En cada caso, dar hipótesis sobre f para que valga la igualdad.

Ejercicio 2. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

i) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} & \text{si } x = \dfrac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ejercicio 3. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}^m$. Probar que f es continua si y sólo si para todo cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un cerrado $W_F \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(F) = W_F \cap S$.

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado es abierto o cerrado (o ninguna de las dos cosas) y probarlo:

i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2(e^x - 1) + yx = 1\}$.

ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 1 < xy + z < 2\}$.

iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \operatorname{sen}^2(x) - xy^2 \geq -2\}$.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}^n$ son la misma función.

Ejercicio 6. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.
Sugerencia: Considerar la función $x - f(x)$.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Probar que el gráfico de f es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+m}$. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 8. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}^m$ una función tal que la imagen de f es un conjunto acotado y el gráfico de f es un conjunto cerrado. Demostrar que f es continua.

Ejercicio 9. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

Ejercicio 10. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \| x \|$.

ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \| x \|^2$.

iii) $f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\sqrt{x}, \cos x)$, con $r = 0$ y con $r > 0$.

iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 3y$.

v) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$.

vi) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, S)$, donde $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 11. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario y sean $f, g : S \to \mathbb{R}^m$ funciones uniformemente continuas.

i) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.

ii) Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.

iii) Probar que si $h : f(S) \to \mathbb{R}^k$ es uniformemente continua entonces $h \circ f : S \to \mathbb{R}^k$ también lo es.

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $(a, b]$ y $[b, c)$. Probar que f es uniformemente continua en (a, c).
¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y también sobre un conjunto $T \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces lo es en $S \cup T$?

Ejercicio 13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sean x_0 y α números reales. Se dice que f es *localmente Lipschitz de orden* α *en el punto* x_0 si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \qquad \text{para todo } x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

i) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0.

ii) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0 entonces f es derivable en x_0.

Ejercicio 14. Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas:

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$.

Ejercicio 15. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz, pero sin embargo f es uniformemente continua ("*uniformemente continua* $\not\Rightarrow$ *Lipschitz*").

Ejercicio 16. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz, es decir, existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\| f(x) - f(x') \| \leq M \| x - x' \| \qquad \forall\, x, x' \in S.$$

i) Demostrar que si S es cerrado, $M < 1$ y $f(S) \subseteq S$, entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$. (En otras palabras, f *tiene un punto fijo*).

   Sugerencia: Considerar la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S definida recursivamente como: $x_1 \in S$ arbitrario y $x_{n+1} := f(x_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y tomar $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

ii) Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ y que f no tiene puntos fijos.

Ejercicio 17. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y sea $f : K \to K$ una función que satisface:

$$\| f(x) - f(x') \| \ < \ \| x - x' \| \quad \text{para todo } x, x' \in K$$

(en particular, f es Lipschitz con $M = 1$). Demostrar que f tiene un punto fijo. (Comparar con los ejercicios 6 y 18).
Sugerencia: Considerar la función $g : K \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \| x - f(x) \|$.

Ejercicio 18.

i) En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$ dado:

(a) $f_n(x) = x^n \qquad S = (-1, 1]$

(b) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n} \qquad S = (1, +\infty)$

(c) $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n \qquad S = [0, 1]$

ii) (a) Observar que la sucesión dada en i)(a) es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función que no es continua.
Probar que la convergencia es uniforme sobre $T = (0, \frac{1}{2})$.

(b) Probar que la sucesión dada en i)(b) converge uniformemente sobre $T = [2, 5]$.

Ejercicio 19. Sea $S \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones, $f_n : S \to \mathbb{R}^M$, y sea $f : S \to \mathbb{R}^M$. Probar que si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S$ tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **no** converge uniformemente a f en S.

Ejercicio 20. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en los conjuntos indicados:

i) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n} \qquad$ en $\mathbb{R}$

ii) $f_n(x) = \operatorname{sen}(\frac{x}{n}) \qquad$ en $\mathbb{R}$

iii) $f_n(x,y) = \dfrac{n}{n+1}(x,y) \qquad$ en $\mathbb{R}^2$

iv) $f_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x \qquad$ en $[0,1]$

v) $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ b + \dfrac{1}{n} & \text{si } x = \dfrac{a}{b},\ b > 0 \text{ y } (a:b) = 1 \end{cases} \qquad$ en $[0,1]$

Ejercicio 21. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a una función continua, pero la convergencia no es uniforme.

Ejercicio 22. Sea $S \subset \mathbb{R}^N$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : S \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \to \mathbb{R}$. Probar que si f_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces:

i) f es acotada

ii) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M \quad \forall\, x \in S, \forall\, n \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada).

Ejercicio 23. Sea $S \subset \mathbb{R}^N$ y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de funciones de S en $\mathbb{R}$ tales que $f_n \to f$ uniformemente en S y $g_n \to g$ uniformemente en S.

i) Probar que $f_n + g_n \to f + g$ uniformemente en S.

ii) Probar que si f_n y g_n están acotadas para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$.

iii) Mostrar que en general no es cierto que $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ uniformemente en S.

Sugerencia: Considerar las sucesiones de funciones del ejercicio 22. iv) y v).

Ejercicio 24. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.

i) Probar $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función $f \equiv 0$ en $[0,1]$.

ii) Verificar que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\big)\, dx$.