Práctica 4

Ejercicio 1. Analizar en cada caso la existencia de $\int_a^b f\,d\alpha$ y calcularla en los casos en que exista.

i) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria y f una función constante sobre $[a,b]$.

ii) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $c \in (a,b)$ y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a,c) \\ 3 & \text{si } x = c \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$$

¿Qué sucede si en lugar de tomar α continua sólo se sabe que α es continua en c?

iii) f como en ii) y $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,c] \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$.

iv) $[a,b] = [-1,3]$, $f(x) = x^3$ y $\alpha(x) = x^2$.

v) $[a,b] = [0, \frac{\pi}{4}]$ y $f(x) = \alpha(x) = \cos(x)$.

Ejercicio 2. Supongamos que $\int_a^b f\,d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f. ¿Qué se puede decir sobre la función α?
Sugerencia: Para cada $c \in [a,b]$ considerar la función monótona f_c definida como $f_c(x) = 0$ si $a \leq x \leq c$ y $f_c(x) = 1$ si $c < x \leq b$.

Ejercicio 3. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición $\pi = \{x_0, ..., x_n\}$ del intervalo $[a,b]$, se define

$$s_\pi := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\big(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\big) \qquad \text{donde } t_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Demostrar que si $f \in \Re(\alpha)$ entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que cumple simultáneamente las condiciones:

(a) $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es monótona en el sentido siguiente: si $m < m'$ entonces $\pi_m \subset \pi_{m'}$.

(b) $\lim_{m\to\infty} \| \pi_m \| = 0$.

(c) $\lim_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f\,d\alpha$, independientemente de la elección de los t_k en cada suma s_{π_m}.

(d) Si $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión monótona de particiones tal que $\pi_m \subset \sigma_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, entonces cumple las condiciones (b) y (c) precedentes.

Sean ahora $g, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ otras funciones, tales que $g \in \Re(\beta)$. Para cada partición π del intervalo $[a,b]$ notamos $r_\pi := \sum\limits_{k=1}^{n} g(t_k)\big(\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})\big)$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Deducir que entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int\limits_a^b f\,d\alpha$ y $\lim\limits_{m\to\infty} r_{\pi_m} = \int\limits_a^b g\,d\beta$.

Ejercicio 4. *Otra definición de integral de Riemann-Stieltjes.*

Con las mismas notaciones que en el ejercicio anterior: Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Diremos que f es *integrable Riemann-Stieltjes*$^\bigstar$ *con respecto a la función* α (y notaremos $f \in \Re^\bigstar(\alpha)$) si se cumple:

> Existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $| s_\pi - A | < \varepsilon$ para toda partición π con $\| \pi \| < \delta$, independientemente de los valores de t_k.

En este caso diremos que A es la integral de Riemann-Stieltjes$^\bigstar$ de f respecto a α.

i) Demostrar que $\Re^\bigstar(\alpha) \subseteq \Re(\alpha)$.

ii) Sea $c \in (a,b)$ y sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas como: $f(x) = \alpha(x) = 0$ para $a \le x < c$, $f(x) = \alpha(x) = 1$ para $c < x \le b$, $f(c) = 0$ y $\alpha(c) = 1$. Demostrar que $f \in \Re(\alpha)$ pero que $f \notin \Re^\bigstar(\alpha)$.

   Sugerencia: Considerar particiones π tales que $c \in \pi$ para ver que $f \in \Re(\alpha)$ y particiones π' tales que $c \notin \pi'$ para ver que $f \notin \Re^\bigstar(\alpha)$.

Nota: De la parte ii) de este ejercicio se deduce que la definición de integral de Riemann-Stieltjes$^\bigstar$ no es equivalente a la dada en clase. Sin embargo, la mayoría de los resultados generales se preservan con ligeras modificaciones.

Ejercicio 5. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$ tales que $\int\limits_a^c f\,d\alpha$ y $\int\limits_c^b f\,d\alpha$ existen. Demostrar que $\int\limits_a^b f\,d\alpha$ también existe y que vale la igualdad: $\int\limits_a^c f\,d\alpha + \int\limits_c^b f\,d\alpha = \int\limits_a^b f\,d\alpha$.

Ejercicio 6. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Demostrar que si $f, g \in \Re(\alpha)$ y $f(x) \le g(x)\ \forall\, x \in [a,b]$, entonces $\int\limits_a^b f\,d\alpha \le \int\limits_a^b g\,d\alpha$.

Ejercicio 7. Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \le x\}$, es decir $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x.

Analizar la existencia de las integrales que siguen y en caso afirmativo calcularla:

i) $\int\limits_0^4 x^2 d(\lfloor x \rfloor)$ ii) $\int\limits_0^2 x d(x - \lfloor x \rfloor)$ iii) $\int\limits_0^2 x^2 d(|x|)$

Ejercicio 8. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ que se indica y en caso afirmativo dar una mayoración para $V_a^b f$.

i) $f(x) = \cos(x)$ en $[0, 3\pi]$

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

iii) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ en $[-1, 2]$

iv) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

En el caso iv) estudiar también la derivabilidad de f.

Ejercicio 9. Demostrar que si f y g son funciones de variación acotada en $[a,b]$ entonces fg también lo es.

Ejercicio 10.

i) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y sean $x, y \in [a,b]$ con $x < y$. Demostrar que $V_a^y f = V_a^x f + V_x^y f$.

ii) Aplicar la igualdad demostrada en i) para calcular $V_a^b f$ para las funciones de los ítems i) y iii) del ejercicio 8.

Ejercicio 11.

i) Para las funciones de variación acotada que siguen, hallar la función v_f (recordamos que $v_f(x) := V_a^x f$):

(a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1-x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en $[0, 2\pi]$

ii) Para cada una de las funciones f del ítem i) encontrar explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.

Ejercicio 12. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y continua en el punto $x_0 \in [a,b]$.

i) Demostrar que vale: $V_a^{x_0} f = \sup\{V_a^x f : x < x_0\} = \inf\{V_a^x f : x > x_0\}$.

ii) Deducir de i) que la función v_f es continua en x_0.

iii) Demostrar a partir de ii) y de la descomposición $f = v_f - (v_f - f)$ que toda función continua y de variación acotada sobre un intervalo $[a,b]$ es una diferencia de funciones monótonas estrictamente crecientes y continuas sobre $[a,b]$.

Ejercicio 13. Sean $f, \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que f es una función continua y α es una función de variación acotada.

i) Demostrar que $\mid f \mid \in \Re(v_\alpha)$.

ii) Demostrar que vale la desigualdad $\left| \int\limits_a^b f \, d\alpha \right| \leq \int\limits_a^b |f| \, dv_\alpha$.

   Sugerencia: Ejercicio 3.

iii) Deducir de ii) que $\left| \int\limits_a^b f \, d\alpha \right| \leq \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| \; V_a^b \alpha$.

iv) Para cada $x \in [a, b]$ se define $\psi(x) = \int\limits_a^x f \, d\alpha$ (observar que ψ está bien definida). Probar que ψ es una función de variación acotada en $[a, b]$.

Ejercicio 14. Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada entonces es integrable Riemann. En particular toda función monótona en $[a, b]$ es integrable Riemann.

Sugerencia: Pensar en términos de integración Riemann-Stieltjes, reducirse al caso monótono y usar integración por partes.