APELLIDOS: ____________________ CARRERA: ____________________

NOMBRES: ____________________ L.U./AÑO: ____________________

PRIMER PARCIAL — 04-08-2005

1	2	3	4	5	Calificación

1. Estudiar la existencia de supremo e ínfimo de los siguientes conjuntos. En caso de existir, hallarlos.

   a) $A = \left\{ \left[\frac{1}{x+1} \right] \;/\; -1 < x \leqslant 4 \right\}$

   b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; x^4 - x^2 - 2 < 0\}$

2. Sea d una métrica en $\mathbb{R}^2$ y (a_n) una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^2, d)$. Se sabe que esta sucesión posee una subsucesión convergente.

   ¿Se puede asegurar que (a_n) también converge para esa métrica?

3. Hallar todos los puntos de acumulación del conjunto

$$\left\{(-1)^n + \frac{1}{m} \;/\; n, m \in \mathbb{N}\right\}$$

4. Sea (a_n) una sucesión acotada. Se definen

$$A_n = \{a_k \;/\; k \geqslant n\} \qquad , \qquad \lambda_n = \sup(A_n)$$

   a) Comprobar que (λ_n) es decreciente y convergente

   b) Mostrar que

$$\text{lím } \lambda_n = \overline{\text{lím}}\ a_n$$

5. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado que contiene a todos los números racionales del intervalo $(0, 1)$. Probar que $[0, 1] \subset A$.

APELLIDOS: ____________________ CARRERA: ____________________
NOMBRES: ____________________ L.U./AÑO: ____________________

SEGUNDO PARCIAL — 04-08-2005

1	2	3	4	5	Calificación

1. Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Probar que f es acotada en (a,b).

   ¿Sigue valiendo este resultado si sólo se pide que f sea continua en (a,b)?

2. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $K \subset U$. Mostrar que existe $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto –cuya clausura es compacta– que satisface
$$K \subset A \subset \bar{A} \subset U$$
   Sugerencia: $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$ con $\varepsilon_x > 0$ tal que $\overline{B(x,\varepsilon_x)} \subset U$.

3. Sea (g_n) una sucesión de funciones de clase C^1 en $[a,b]$ tal que (g_n') converge uniformemente a una función $G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y tal que $g_n(a) \longrightarrow A$.

   Bajo estas condiciones podemos asegurar que existe $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que es límite puntual de las g_n.

   ¿Es cierto que $g_n \rightrightarrows g$ en $[a,b]$?

4. Probar que no puede existir una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua y biyectiva.

5. Calcular
$$\int_0^2 e^x d[x^2]$$