APELLIDOS: ____________________ CARRERA: ____________________
NOMBRES: ____________________ L.U./AÑO: ____________________

SEGUNDO PARCIAL — 14-07-2005

1	2	3	4	5	Calificación

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitziana de orden α en el punto c, i.e., existen $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$|f(x) - f(c)| < M|x - c|^{\alpha}$$

en $B(c, \delta)$. Probar que

a) f es continua en c si $\alpha > 0$ y derivable en c si $\alpha > 1$. ¿Se puede calcular $f'(c)$ en este último caso?

b) Dar un ejemplo de una función que satisfaga la condición de Lipschitz de orden 1 en c y que no sea derivable en $x = c$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unifomemente contiua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = f(x + \tfrac{1}{n})$$

Demostrar que (f_n) converge uniformemente en $\mathbb{R}$ y hallar su límite.

3. Caracterizar a todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$.

4. Sea $E \subset \mathbb{R}^m$. Probar que

$$E \text{ es cerrado} \qquad \Longleftrightarrow \qquad E = \{x \in \mathbb{R}^m \ / \ d_E(x) = 0\}$$

siendo $d_E(x) = \inf\{d(x, y) \ / \ y \in E\}$.

5. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $f \geqslant 0$ en $[a, b]$. Si g es estrictamente creciente, demostrar que

$$\int_a^b f \, dg = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \equiv 0 \quad \text{en } [a, b]$$