APELLIDOS: ____________________ CARRERA: ____________________

NOMBRES: ____________________ L.U./AÑO: ____________________

PRIMER PARCIAL — 26-05-2005

1	2	3	4	5	Calificación

1. Sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y sean

$$S = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A \quad , \quad T = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$$

Para cada una de las afirmaciones siguientes dar una demostración o un contraejemplo, según corresponda.

a) Si x es punto de acumulación de T, entonces lo es de cada $A \in \mathcal{F}$

b) Si x es punto de acumulación de S, entonces lo es de –al menos– uno de los conjuntos $A \in \mathcal{F}$.

2. Calcular el límite superior e inferior de las siguientes sucesiones

a) $a_n = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$

b) $b_n = e^{-n}\left(\cos(n\pi) + \operatorname{sen}(n^2\pi)\right)$

c) $c_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$

3. Sea consideran en $\mathbb{R}^2$ las métricas

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \ , \ d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \ , \ d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

a) Mostrar que $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ es completo

b) ¿Vale lo mismo para $(\mathbb{R}^2, d_1)$ y $(\mathbb{R}^2, d_2)$?

4. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que satisface la siguiente propiedad:

Para todo par $x, y \in A$, $x \neq y$, es $|x - y| \geqslant 1$

a) Probar que si A es acotado, entonces es finito

b) ¿Sigue valiendo esta conclusión si se reemplaza $|x-y| \geqslant 1$ por $|x-y| \geqslant \frac{1}{2}$?

5. Demostrar o dar un contraejemplo –según corresponda– de las siguientes afirmaciones

a) Existe un conjunto A tal que $\overline{A} = \partial A$

b) Para todo conjunto A es $\overset{\circ}{\partial A} = \emptyset$