APELLIDOS: ______________________ CARRERA: ______________________
NOMBRES: ______________________ L.U./AÑO: ______________________

PRIMER PARCIAL — 28-07-2005

1	2	3	4	5	Calificación

1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. Probar que $\underline{\lim}\, na_n = 0$.

2. Demostrar o dar un contraejemplo, según corresponda, de las siguientes afirmaciones

   a) Para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{\bar{A}} = \overset{\circ}{A}$

   b) Para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{\overset{\circ}{A}} = \bar{A}$.

3. Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$g(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \neq v \\ 0 & \text{si } u = v \end{cases}$$

   Se define la función $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x,y) = |x_1 - y_1| + g(x_2, y_2)$.

   a) demostrar que f es una métrica

   b) hallar las sucesiones convergentes para esta métrica

   c) ¿es $(\mathbb{R}^2, f)$ completo?

4. Sean A y B subconjuntos de números reales tales que

   ★ $\mathbb{R} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \neq \emptyset$

   ★ Si $\alpha \in A$ y $\beta \in B$, entonces $\alpha < \beta$

   Probar que existe un único número real γ tal que

$$\alpha \leqslant \gamma \quad \text{para todo } \alpha \in A \qquad \text{y} \qquad \gamma \leqslant \beta \quad \text{para todo } \beta \in B$$

5. Sea (a_n) una sucesión de números reales que converge al número real r. ¿Es cierto que r es un punto de acumulación de $\{a_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$?

APELLIDOS: ____________________ CARRERA: ____________________

NOMBRES: ____________________ L.U./AÑO: ____________________

SEGUNDO PARCIAL — 28-07-2005

1	2	3	4	5	Calificación

1. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Probar que f transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy.

   ¿Sigue valiendo este resultado si sólo se pide que f sea continua en (a, b)?

2. Sea (g_n) una sucesión de funciones de clase C^1 en $[a, b]$ tales que
$$g_n' \rightrightarrows G \quad \text{en } [a,b] \qquad \text{y} \qquad g_n(a) \longrightarrow A$$
   Probar que la sucesión (g_n) converge puntualmente a una función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

   Sugerencia: calcular $\int_a^x g_n'(t)\, dt$

3. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ tal que
$$\phi(x,y) \geqslant 0 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \text{“}\phi(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$
   Probar que existe $M > 0$ tal que
$$\phi(x,y) > M\|(x,y)\|^2$$
   para $(x, y) \neq (0, 0)$.

   Sugerencia: $\dfrac{\phi(x,y)}{\|(x,y)\|^2} = \phi\left(\dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|}\right)$.

4. Analizar si es posible encontrar una función $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que no sea continua en 4.

5. Sean
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & , 1 \leqslant x < \pi \\ 5 & , \pi \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \qquad , \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & , 1 \leqslant x \leqslant \pi \\ 7 & , \pi < x \leqslant 4 \end{cases}$$
   Estudiar la existencia de $\displaystyle\int_1^4 f\, dg$. En caso de existir, hallar su valor.