

EJERCICIOS ADICIONALES PARA EL PRIMER PARCIAL

1. Caracterizar todas las sucesiones convergentes $(a_n) \subset \mathbb{Z}$.
2. Calcular la clausura del conjunto $A = \left\{ \frac{m}{2^n} / m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
3. Sea δ la métrica discreta en \mathbb{R} . Caracterizar las sucesiones convergentes para esta métrica.
4. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$, ¿existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x < m < y$? ¿Qué se puede afirmar si sólo se sabe que $y - x \geq 1$?
5. Sea E un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^n . Se sabe que $a \in \mathbb{R}^n$ satisface que

$$\inf\{\|x - a\| / x \in E\} = 0$$

¿Se puede asegurar que $a \in E$ o bien que $a \notin E$?

6. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} tales que $a \leq b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Probar que

a) A está acotado superiormente y B inferiormente

b) $\sup A \leq \inf B$

7. Calcular el supremo y el ínfimo de

a) $\left\{ (-1)^n \left(2 - \frac{4}{n^2} \right) / n \in \mathbb{N} \right\}$

b) $\left\{ \left[\frac{2}{x} \right] / 0 < x < \frac{1}{4} \right\}$

c) $\left\{ (-1)^n \frac{n^3 - 4n}{6n^3} / n \in \mathbb{N} \right\}$

8. Mostrar que $S = \mathbb{R}^n - \{a\}$ no es completo.

9. Dar ejemplos de una sucesión

a) acotada y con tres puntos límite exactamente

b) tal que su único punto límite sea $+\infty$

c) que tenga un único punto límite pero que no sea convergente

10. Hallar el límite superior e inferior de las sucesiones cuyo término general es

a) $a_n = \operatorname{sen}(n\frac{\pi}{4})$

b) $a_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})$

c) $a_n = \cos(n\frac{\pi}{3}) + \operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})$