PRÁCTICA 1

1. A partir de los axiomas de los números reales, probar

a) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$

b) $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$

c) Si $x^2 + y^2 = 0$, entonces $x = y = 0$

d) $x^2 = y^2$ si y sólo si $x = y$ o $x = -y$

e) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

f) Si $0 \leqslant a < b$ y $0 \leqslant c < d$, entonces $ac < bd$

2. Mostrar que si $0 < a < b$, entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

3. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Probar que son equivalentes las siguientes definiciones alternativas del supremo de A.

(I) $\alpha \in \mathbb{R}$ verifica que

(i) para todo $a \in A$ es $\alpha \geqslant a$

(ii) si $t \geqslant a$ para todo $a \in A$, entonces $t \geqslant \alpha$

(II) $\alpha \in \mathbb{R}$ verifica que

(i) para todo $a \in A$ es $\alpha \geqslant a$

(ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < a_\varepsilon$

(III) $\alpha \in \mathbb{R}$ verifica que

(i) para todo $a \in A$ es $\alpha \geqslant a$

(ii) existe una sucesión $(a_n) \subset A$ tal que $\lim a_n = \alpha$

Enunciar y demostrar equivalencias análogas para el ínfimo.

4. **a)** Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:

$$\mathbb{R}_{>0} \qquad , \qquad \{m^2 \ / \ m \in \mathbb{N}\}$$

b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente:

$$\mathbb{Z} \qquad , \qquad \{x^{-1} \ / \ x < 0\} \qquad , \qquad \{-x^2 + 2x + 1 \ / \ x \in \mathbb{R}\}$$

5. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos tales que $A \subset B$

a) Suponiendo que A y B están acotados superior e inferiormente, establecer y demostrar las relaciones de orden entre los números: $\sup A$, $\text{ínf} A$, $\sup B$, $\text{ínf} B$.

b) ¿Qué sucede cuando A o B no está acotado superior o inferiormente?

6. Hallar –cuando existan– supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$

a) $A_1 = (a, b]$

b) $A_2 = \left\{ \dfrac{1}{2^n} \ / \ n \in \mathbb{N} \right\}$

c) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$

d) $A_4 = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\}$

e) $A_5 = \{x^2 - x - 1 \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

f) $A_6 = \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \ / \ n, m \in \mathbb{N} \right\}$

g) $A_7 = \{x^2 - 5x + 4 \ / \ x \in [2, 4)\}$

h) $A_8 = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^2 + 4 < 16\}$

i) $A_9 = \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \ / \ 1 < x^3 + 1 \leqslant 3\}$

7. Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y $c \in \mathbb{R}$ se define $c.A = \{cx \ / \ x \in A\}$. Denotaremos $-A$ al conjunto $(-1).A$.

a) Probar que si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente y vale

$$\text{ínf}(-A) = -\sup A$$

b) Probar que si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces $c.A$ también lo está y vale

$$\sup(c.A) = c \sup A$$

c) ¿Qué se puede decir cuando $c < 0$?

d) Enunciar y probar resultados análogos a los anteriores para $\text{ínf}(c.A)$.

8. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$, ambos no vacíos, se definen

$$A + B = \{a + b \ / \ a \in A \ , \ b \in B\}$$
$$A.B = \{ab \ / \ a \in A \ , \ b \in B\}$$

a) ¿Qué condiciones deben satisfacer A y B para que exista $\sup(A + B)$? Estudiar la relación entre $\sup(A + B)$ y $\sup A + \sup B$

b) ¿Es posible dar resultados parecidos a los de la parte a) para $A.B$, relacionando en este caso los números $\sup(A.B)$ y $\sup A. \sup B$? ¿Cuáles?

9. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $|c| < 1$. Analizar la existencia de $\lim c^n$.

10. Sea (a_n) una sucesión de números reales tal que $\lim a_n = L$

a) Probar que

(i) Si $r < L$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r$ para todo $n \geqslant n_0$

(ii) Si $r > L$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r$ para todo $n \geqslant n_0$

b) ¿Puede reformularse a)(i) si sólo se sabe que $r \leqslant L$?

c) ¿Qué puede decirse de L si se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geqslant r$ para todo $n \geqslant n_0$? ¿Cambia la conclusión si se sabe que $a_n > r$ para todo $n \geqslant n_0$?

11. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $\lim q_n = x$.

¿Es cierta esta afirmación si se reemplaza *decreciente* por *creciente*?

12. Dar un ejemplo de una sucesión de Cauchy de números racionales que no converja a un racional.

13. a) Si (a_n) es una sucesión de Cauchy, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$

b) Mostrar que la recíproca de a) no es cierta.

Sugerencia: $a_n = \ln n$.

14. Sea (a_n) una sucesión de números reales que converge a 0 y sea (σ_n) la sucesión de las ***medias aritméticas*** (promedios) definida por

$$\sigma_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Demostrar que $\lim \sigma_n = 0$

15. Dados una sucesión de números reales (a_n) y un número $\alpha \in \mathbb{R}$, se dice que α es un ***punto límite*** de (a_{n_k}) si existe una subsucesión (a_n) tal que $\lim a_{n_k} = \alpha$.

Hallar los puntos límite de las sucesiones siguientes

a) $1 - \dfrac{1}{n}$

b) $(-1)^n$

c) $\cos(\frac{n\pi}{2})$

d) $(-1)^n(2 + \frac{3}{n})$

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$

f) $\dfrac{n + (-1)^n(2n+1)}{n}$

16. Hallar los límites superior e inferior de las sucesiones del ejercicio anterior.

17. Hallar el límite superior e inferior de

a) $1,\ 3,\ -1,\ 1,\ 3,\ -1,\ 1,\ 3,\ -1,\ \ldots$

b) $\left(1-\frac{1}{n}\right)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

c) $(-1)^n\left(2+\frac{3}{n}\right)$

d) $(-1)^n.n$

e) $n^{(-1)^n}$

f) $1+\frac{n}{n+1}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

g) $\frac{n}{n+1}\operatorname{sen}^2\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

h) $n^2\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

i) (s_n) definida por: $s_1 = 0$, $s_{2n} = \frac{s_{2n-1}}{2}$, $s_{2n+1} = \frac{1}{2} + s_{2n}$

j) $\frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right]$

18. Encontrar una sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\underline{\lim}\, x_n = -3$, $\overline{\lim}\, x_n = 5$ y el conjunto $\{x_n \ /\ n \in \mathbb{N}\}$ sea infinito.

19. Sea (a_n) una sucesión de números reales acotada. ¿Cuántos elementos de (a_n) pueden ser mayores que $\overline{\lim}\, a_n + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$? ¿Y menores que $\underline{\lim}\, a_n - \varepsilon$?

20. ¿Es cierto que

a) si $\overline{\lim}\, x_n = 2$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 1,99$ para todo $n \geqslant n_0$?

b) si $\overline{\lim}\, x_n = b$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leqslant b$ para todo $n \geqslant n_0$?

21. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales. Enunciar y demostrar las relaciones de orden entre los siguientes números:

$$\underline{\lim}\,(a_n+b_n) \quad , \quad \overline{\lim}\,(a_n+b_n) \quad , \quad \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \quad , \quad \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n$$