PRÁCTICA 2

1. Una función $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ se llama ***norma*** en $\mathbb{R}^n$ si verifica

- $N(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = (0, \ldots, 0)$
- $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $N(v + w) \leqslant N(v) + N(w)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$

Sean

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \qquad \text{y} \qquad \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

Demostrar que las funciones $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_\infty$ son normas.

2. Una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ se llama ***distancia*** o ***métrica*** en $\mathbb{R}^n$ si verifica

- $d(v, w) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = w$
- $d(v, w) = d(w, v)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$
- $d(v, w) \leqslant d(v, u) + d(u, w)$ para todo $v, w, u \in \mathbb{R}^n$

a) Demostrar que si N es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces $d(v, w) = N(v - w)$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$

b) Demostrar que si d es una distancia arbitraria en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$D(v, w) = \frac{d(v, w)}{1 + d(v, w)}$$

también es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

Sugerencia: considerar la función monótona creciente $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$

NOTA: observar que la distancia D verifica $D(v, w) < 1$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$

c) Para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ y cada $r > 0$ se define la bola con centro p y radio r con respecto a la distancia D (definida en el item anterior) de la manera habitual

$$B_D(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ D(x, p) < r\}$$

¿Qué subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es $B_D(p, 1)$? ¿Y $B_D(p, 2)$?

NOTA: observar que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es acotado para esta distancia

d) Supongamos ahora que d es la distancia usual en $\mathbb{R}^2$ y D es la definida en b).

(i) Dibujar la bola $B_D((0, 0), \frac{1}{2})$

(ii) Sea $p \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, existen $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$B(p, r_1) \subset B_D(p, \varepsilon) \qquad \text{y} \qquad B_D(p, r_2) \subset B(p, \varepsilon)$$

donde $B(p, r)$ denota la bola de centro p y radio r para la distancia euclídea usual.
Nota: esto muestra en particular que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es abierto para la distancia euclídea usual si y sólo si es abierto para la distancia D, a pesar de que todo conjunto es acotado respecto de esta última.

3. Estudiar qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) verifica cada uno de los conjuntos siguientes

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 1\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy > 0\}$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$

e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y > z\}$

4. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar las propiedades siguientes

a) $\overset{\circ}{S} = \{p \in \mathbb{R}^n \ / \ \text{existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(p, \varepsilon) \subset S\}$

b) Si $S \subset T$, entonces $\overset{\circ}{S} \subset \overset{\circ}{T}$

c) $S \overset{\circ}{\cap} T = \overset{\circ}{S} \cap \overset{\circ}{T}$

¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?

d) $S \overset{\circ}{\cup} T \supset \overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{T}$

¿Vale la igualdad?

e) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$

¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?

f) $\overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$

¿Vale la igualdad?

g) $(\mathbb{R}^n \overset{\circ}{-} S) = \mathbb{R}^n - \overline{S}$

5. En cada uno de los siguientes casos, hallar $\overset{\circ}{S}$, $\overline{S}$ y ∂S

a) $S = [0, 1]$

b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$

c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$

d) $S = \{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$

e) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

f) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

6. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Demostrar

a) S es abierto si y sólo si es disjunto con ∂S

b) S es cerrado si y sólo si $\partial S \subset S$

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Demostrar que $p \in \partial S$ si y sólo si todo entorno de p contiene un punto en S y un punto que no está en S.

8. Estudiar la convergencia en $\mathbb{R}^2$ de las sucesiones siguientes

$$a_n = (n, \tfrac{1}{n}) \quad \text{y} \quad b_n = (\tfrac{n+1}{n}, \tfrac{(-1)^n}{n})$$

9. Para cada $S \subset \mathbb{R}^n$ denotamos con S'al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del ejercicio 5.

b) Un punto $p \in S$ se llama ***punto aislado*** de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

10. Hallar los puntos de acumulación y la adherencia del conjunto $S = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \ / \ n, m \in \mathbb{N}\}$.

11. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son –a la vez– abiertos y cerrados.

12. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se llama ***conexo*** si para todo par de conjuntos abiertos $G, H \subset \mathbb{R}^n$ tales que

$$S = (S \cap G) \cup (S \cap H) \qquad \text{y} \qquad S \cap G \cap H = \emptyset$$

vale que $S \subset G$ o $S \subset H$.

a) Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es conexo. ¿Qué ocurre con $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$? ¿Y con $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$?

b) ¿Es $\mathbb{R}$ conexo?

c) Demostrar que el intervalo $[0, 1]$ es conexo

d) Decidir si los conjuntos del ejercicio 3 son conexos o no

e) Demostrar que un conjunto abierto y conexo $S \subset \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad de que dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse mediante una línea poligonal totalmente contenida en S

Sugerencia: dado $p \in S$ arbitrario, considerar los conjuntos

$$G = \{x \in S \ / \ x \text{ se une a } p \text{ con una poligonal contenida en } S\} \quad \text{y} \quad H = S - G$$

13. Sean S y T conjuntos conexos de $\mathbb{R}^2$.

a) ¿Es $S \cap T$ necesariamente conexo?

b) ¿Es $S \cup T$ necesariamente conexo? Si la respuesta es negativa, dar una condición (no trivial) que garantice que $S \cup T$ sea conexo.

14. Sea realiza la siguiente construcción recursiva en $\mathbb{R}^2$:

- ⋄ partiendo del origen se dibuja una línea Γ_0 de una unidad hacia la derecha
- ⋄ desde el nuevo extremo de Γ_0 se dibuja otra línea Γ_1 de $\frac{1}{2}$ unidad hacia arriba
- ⋄ desde el nuevo extremo de Γ_1 se traza otra línea Γ_2 de $\frac{1}{4}$ de unidad a la derecha
- ⋄ luego Γ_3 de $\frac{1}{8}$ de unidad hacia arriba
- ⋄ Γ_4 de $\frac{1}{16}$ de unidad a la derecha y así sucesivamente.

a) Estudiar la convergencia de la sucesión de vértices de esta "poligonal"

b) Hallar $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \Gamma_n}$.

15. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, se considera el intervalo abierto $I_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$

a) Demostrar que $(0, 1) = \bigcup_{n\geqslant 2} I_n$

b) ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ tal que $(0, 1) = \bigcup_{n\in\mathcal{F}} I_n$?

c) ¿Qué puede decirse sobre la compacidad del conjunto $(0, 1)$?

16. Sea $U_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|(x, y) - (0, n)\| < n\}$. Demostrar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.

17. Demostrar que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

18. Sean $S, T \subset \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}^n$. Se define la ***distancia entre*** p **y** S como

$$d(p, S) = \inf\{\|p - x\| \ / \ x \in S\}$$

a) Demostrar que $|d(p, S) - d(q, S)| \leqslant d(p, q)$ para todo $p, q \in \mathbb{R}^n$

b) Hallar todos los $p \in \mathbb{R}^n$ tales que $d(p, S) = 0$

19. Sea $S = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \ / \ n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Demostrar que los puntos de acumulación de S son los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ y el 0.

El conjunto $S \cup \{0\}$, ¿es compacto?