PRÁCTICA 3

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ y $X, Y \subset \mathbb{R}^m$. Decidir, en cada caso, si corresponde poner "$\subset$" , "$\supset$" o "$=$" y probarlo

a) $f(A \cup B) \quad \ldots \quad f(A) \cup f(B)$

b) $f^{-1}(X \cup Y) \quad \ldots \quad f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

c) $f(A \cap B) \quad \ldots \quad f(A) \cap f(B)$

d) $f^{-1}(X \cap Y) \quad \ldots \quad f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

e) $f(\mathbb{R}^n - A) \quad \ldots \quad \mathbb{R}^m - f(A)$

f) $f^{-1}(\mathbb{R}^m - X) \quad \ldots \quad \mathbb{R}^n - f^{-1}(X)$

En cada caso, dar hipótesis sobre f para que valga la igualdad.

2. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

a) $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b}, \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

3. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado es abierto o cerrado (o ninguna de las dos cosas) y probarlo:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y^2(e^x - 1) + yx = 1\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 1 < xy + z < 2\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \operatorname{sen}^2 x - xy^2 \geqslant -2\}$

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Demostrar que $f$es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}^n$ son la misma función.

5. Sea $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ una función continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

Sugerencia: considerar la función $x - f(x)$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua. Probar que el gráfico de f es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+m}$. ¿Vale la recíproca?

7. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

8. Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$

9. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$

c) $f : (r, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\sqrt{x}, \cos x)$, con $r = 0$ y con $r > 0$

d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 3y$

e) $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$

f) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, S)$, siendo $S \subset \mathbb{R}^n$

10. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario y sean $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funciones uniformemente continuas. Probar que

a) $f + g$ es uniformemente continua

b) si $h : f(S) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es uniformemente continua, entonces $h \circ f : S \longrightarrow \mathbb{R}^k$ también lo es.

11. Encontrar una función

a) definida en $(0, 1)$ continua y acotada pero no uniformemente continua

b) continua y acotada en $\mathbb{R}$ pero no uniformemente continua.

12. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $(a, b]$ y $[b, c)$. Probar que f es uniformemente continua en (a, c).

¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ y también sobre un conjunto $T \subset \mathbb{R}^n$, entonces lo es en $S \cup T$?

13. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y sean x_0 y α números reales. Se dice que f es ***localmente Lipschitz de orden*** α ***en el punto*** x_0 si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \qquad \text{para todo } x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \varepsilon$$

a) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0, entonces f es continua en x_0

b) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0, entonces f es derivable en x_0.

14. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$, decimos que f es ***Lipschitz*** si existe $M > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(x')\| \leqslant M\|x - x'\| \qquad \text{para todo} \quad x, x' \in S$$

a) Demostrar que si S es cerrado, $M < 1$ y $f(S) \subset S$, entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$; es decir, f tiene un punto fijo.

Sugerencia: considerar la sucesión $(x_n) \subset S$ definida recursivamente como

$$\begin{aligned} &x_1 \quad \text{arbitrario} \\ &x_{n+1} = f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Demostrar que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

b) Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado

c) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$$

Demostrar que f es Lipschitz (con $M = 1$) y que f no tiene puntos fijos.

15. Sea $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz, pero sin embargo f es uniformemente continua.

16. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y sea $f : K \longrightarrow K$ una función que satisface

$$\|f(x) - f(x')\| < \|x - x'\|$$

para todo $x, x' \in K$; en particular f es Lipschitz con $M = 1$.

Demostrar que f tiene un punto fijo.

Sugerencia: considerar la función $g : K \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \|x - f(x)\|$.

17. a) En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión (f_n) definida en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$ dado

(i) $f_n(x) = x^n \qquad S = (-1, 1]$

(ii) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n} \qquad S = (1, +\infty)$

(iii) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n \qquad S = [0, 1]$

b) (i) Observar que la sucesión dada en $a)(i)$ es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función que no es continua.
Comprobar que la convergencia es uniforme en $T = (0, \frac{1}{2})$

(ii) Probar que la sucesión dada en a)(ii) converge uniformemente sobre $T = [2, 5]$.

18. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones (f_n) en los conjuntos indicados

a) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$ en $\mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \operatorname{sen}(\frac{x}{n})$ en $\mathbb{R}$

c) $f_n(x, y) = \dfrac{n}{n+1}(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$

d) $f_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x$ en $[0, 1]$

e) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ o } x = 0 \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b}\ ,\ b > 0\ ,\ (a : b) = 1 \end{cases}$ en $[0, 1]$

19. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + x^2} - \frac{x(x^2 + 1)}{1 + (n + 1)^2 x^2}$$

converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a una función continua, pero que la convergencia no es uniforme.

20. Sea $S \subset \mathbb{R}^k$ y sea (f_n) una sucesión de funciones $f_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Probar que si cada f_n es acotada, entonces

(i) f es acotada

(ii) existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leqslant M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, (f_n) es uniformemente acotada en S.

21. Sea $S \subset \mathbb{R}^k$ y sean (f_n) y (g_n) dos sucesiones de funciones de S en $\mathbb{R}$ tales que $f_n \rightrightarrows f$ en S y $g_n \rightrightarrows g$ en S [1]. Probar que

a) $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ en S

b) si cada f_n y cada g_n está acotada, entonces $f_n g_n \longrightarrow fg$

c) —en general— no es cierto que $f_n g_n \rightrightarrows fg$ en S.
Sugerencia: considerar las sucesiones de funciones del ejercicio 18 d) y e).

22. Sea (f_n) la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = n^2 x(1 - x)^n$

a) Probar que (f_n) converge puntualmente a la función $f \equiv 0$ en $[0, 1]$

b) Verificar que existe

$$\lim \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

y que

$$\lim \left(\int_0^1 f_n(x)\, dx \right) \neq \int_0^1 (\lim f_n(x))\ dx$$

[1] la doble flecha $\rightrightarrows$ indica convergencia uniforme