# PRÁCTICA 4

**1.** Analizar en cada caso la existencia de $\int_a^b f\,d\alpha$ y calcularla en los casos en que exista.

a) $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria y $f$ una función constante sobre $[a,b]$.

b) $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sea $c \in (a,b)$ y sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a,c) \\ 3 & \text{si } x = c \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$$

¿Qué sucede si en lugar de tomar $\alpha$ continua sólo se sabe que $\alpha$ es continua en $c$?

c) $f$ como en b) y $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,c] \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$

d) $[a,b] = [-1,3]$ , $f(x) = x^2$ y $\alpha(x) = x^2$

e) $[a,b] = [0, \frac{\pi}{4}]$ y $f(x) = \alpha(x) = \cos x$

**2.** Supongamos que $\int_a^b f\,d\alpha = 0$ para toda función monótona creciente $f$. ¿Qué se puede decir sobre $\alpha$?

*Sugerencia*: para cada $c \in [a,b]$, considerar la función $f_c$ definida por $f_c(x) = 0$ si $x \in [a,c]$ y $f_c(x) = 1$ si $x \in (c,b]$.

**3.** Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente. Demostrar que si $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ y $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a,b]$,entonces

$$\int_a^b f\,d\alpha \leqslant \int_a^b g\,d\alpha$$

**4.** Analizar la existencia de las integrales siguientes y en caso afirmativo calcularla

a) $\int_0^4 x^2\,d([x])$

b) $\int_0^2 x\,d(x-[x])$

c) $\int_0^2 x^2\,d(|x|)$

d) $\int_0^2 [x]\,d([x])$.

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\, d\,(\text{signo}(x))$

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\, d\,(\text{signo}(x))$

**5.** Demostrar que

$$\int_0^3 x\, d\,([x]-x) = \frac{3}{2}.$$

**6.** Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $(a,b)$ tal que $g'(x)$ es continua en $[a,b]$. Para toda $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, probar que

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b f(x) g'(x)\, dx.$$

**7.** Usando el ejercicio anterior, calcular

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, d\,(\cos x)$.

b) $\displaystyle\int_a^b (x^2-1)\, d\left(x^3/3 + x\right)$.

c) $\displaystyle\int_1^2 x.\,[x]\;\, d\,(\ln x)$.

**8.** Sea $f \in \mathcal{R}(g)$ en $[a,b]$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} F: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f\, dg. \end{array}$$

Comprobar, mediante un ejemplo, que no siempre $F$ es continua.

**9.** Supongamos que $g(x)$ es creciente en $[a,b]$; $a \leqslant x_0 \leqslant b$; y $g$ continua en $x_0$. Si $f(x_0) = 1$, y $f(x) = 0$ si $x \neq x_0$, probar que $f \in \mathcal{R}(g)$ y que

$$\int_a^b f\, dg = 0.$$

**10.** Sean las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccc} f_1: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1/4 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g_1: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g_2: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g_3: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases} \end{array}$$

a) Analizar la existencia de $\int_{-1}^{1} f_1\, dg_1$. En caso de que la integral exista, calcularla.

b) Analizar la existencia de $\int_{-1}^{1} f_1\, dg_2$. En caso de que la integral exista, calcularla.

c) Probar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1}^{1-\varepsilon} f_4\, dg_3 \neq \int_{-1}^{1} f_4\, dg_3.$$

**11.** si $g(x)$ es tal que $g(x) = 0$, si $x < 0$, y $g(x) = 1$, si $x > 0$, y $f(x)$ es una función acotada en $[-1, 1]$, probar que

a) si $g(0) = 0$, $f \in \mathcal{R}(g) \iff \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$; y en este caso, $\int_{-1}^{1} f\, dg = f(0)$.

b) si $g(0) = 1$, $f \in \mathcal{R}(g) \iff \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$; y en este caso, $\int_{-1}^{1} f\, dg = f(0)$.

c) si $g(0) = \frac{1}{2}$, $f \in \mathcal{R}(g) \iff f$ es continua en 0. ¿Cuánto vale $\int_{-1}^{1} f\, dg$ en este caso?