Practica 1

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números que converge a 0. A partir de ellas definimos la sucesión $y_n = \min\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. Demostrar que la sucesión (y_n) también converge a 0.

2. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números que convergen a L y supongamos que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión tal que $0 \le t_n \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $t_n a_n + (1 - t_n) b_n$ converge a L.

3. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a L.

   a) Si $r < L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \ge n_0$ se tiene que $a_n > r$.

   b) Si $r > L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que tal que para cada $n \ge n_0$ se tiene que $a_n < r$.

   c) ¿Qué ocurre si sólo se sabe que $r \le L$?

   d) ¿Qué puede decirse de L si se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r \ \forall n \ge n_0$?

4. *a*) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números que converge a 0 y sea σ_n la sucesión de las medias aritméticas (promedios) definida como
$$\sigma_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$
   Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

   b) Deducir del ítem anterior que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números que converge a L entonces
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L.$$

   c) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Entonces $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ converge a L. (Hay que usar el ítem anterior.)

   d) Finalmente, bajo las mismas hipótesis del ítem anterior, podemos concluir «D'alembert implica Cauchy»: si la sucesión $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ converge a L entonces la sucesión $\sqrt[n]{a_n}$ también converge a L.

5. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$.

6. Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un número $\alpha \in \mathbb{R}$, se dice que α es un *punto límite de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$.

   Hallar los puntos límites de las sucesiones:

   (a) $1 - \dfrac{1}{n}$ (b) $(-1)^n$ (c) $\cos(\dfrac{n\pi}{2})$

   (d) $(-1)^n(2 + \dfrac{3}{n})$ (e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots$ (f) $\dfrac{n + (-1)^n(2n+1)}{n}$

7. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Probar que son equivalentes las siguientes definiciones alternativas del supremo de A.

   a) s verifica que:

      1) $\forall a \in A$ se tiene $s \geq a$;
      2) si $t \geq a$ para todo $a \in A$, entonces $t \geq s$.

   b) s verifica que:

      1) $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
      2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.

   c) s verifica que:

      1) $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
      2) existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida A tal que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = s$.

   Enunciar equivalencias análogas para el ínfimo (y si le costaron los ítems anteriores demuestre alguna).

8. Sean A y $B \subseteq \mathbb{R}$, dos conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$.

   a) Suponiendo que A y B están acotados superior e inferiormente, establecer y demostrar las relaciones de orden entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$, $\inf(B)$.
   b) ¿Qué sucede cuando A o B no está acotado superior o inferiormente?

9. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

   a) $A_1 = (a, b]$.
   b) $A_2 = \left\{ \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.
   c) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.
   d) $A_4 = \left\{ x \in \mathbb{Q}\ : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \right\}$.
   e) $A_5 = \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$.
   f) $A_6 = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.
   g) $A_7 = \{x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4)\}$.

10. Sea $S \subset [0, 1]$ el conjunto de todas las expresiones decimales infinitas $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, donde todos los dígitos, excepto un número finito de ellos, son 5 o 7. S, ¿tiene supremo ? Sí, no, ¿por qué?.

11. Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío se definen, para cada $c \in \mathbb{R}$, $c.A = \{c.x : x \in A\}$ y $-A = (-1).A$.

    a) Probar que si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente y vale $\inf(-A) = -\sup A$.

b) Probar que si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces $c.A$ también lo está y $\sup(c.A) = c \sup A$.

c) ¿Qué se puede decir en el caso que $c < 0$?

d) Enunciar resultados análogos a los anteriores para $\inf(c.A)$ (y demuestre alguno(s) si tiene ganas).

12. Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ambos no vacíos se definen

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
$$A.B := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

a) ¿Qué condiciones deben verificar A y B para que exista $\sup(A + B)$? Estudiar la relación entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$.

b) ¿Es posible dar resultados parecidos a los de la parte (a) para $A.B$ y los números $\sup(AB)$ y $\sup(A).\sup(B)$? ¿Cuáles?

13. Hallar los límites superior e inferior de las sucesiones del ejercicio anterior.

14. Se tienen sucesiones acotadas de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Enunciar y demostrar las relaciones de orden entre los cuatro números que siguen:

- $\liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
- $\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
- $\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$
- $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$.

15. A partir de las siguientes propiedades de orden de los números reales:

i) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$, se tiene que $a < b$ ó $b < a$.

ii) Si $a < b$, entonces $\forall c$, $a + c < b + c$.

iii) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < ab$.

iv) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

Mostrar los siguientes hechos:

a) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

b) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.

c) Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$.

d) Si $x^2 + y^2 = 0$, entonces se tiene que $x = y = 0$.