Practica 2

1. Decimos que una función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una *norma* en $\mathbb{R}^n$ si se verifica que:

   - $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = (0, ..., 0)$.
   - $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$, *para todo* $v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ *para todo* $v, w \in \mathbb{R}^n$.

   Sean

$$\| (x_1, ..., x_n) \|_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} | x_i |$$

$$\| (x_1, ..., x_n) \|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} | x_i | \,.$$

   a) Demostrar que las funciones $\| * \|_1$ y $\| * \|_\infty$ son normas.

   b) Graficar los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definidos por las ecuaciones $\|(x, y)\|_1 \leq 1$ y $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$.

2. *Una función* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *se llama una* <u>*distancia*</u> *en* $\mathbb{R}^n$ *si se cumple que:*

   - $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$.
   - $d(v, w) = d(w, v)$, *para todo* $v, w \in \mathbb{R}^n$.
   - $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$, *para todo* $v, w, u \in \mathbb{R}^n$.

   a) Demostrar que si N es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces $d(v, w) := N(v - w)$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

   b) Demostrar que si d es una distancia arbitraria en $\mathbb{R}^n$, entonces $D(v, w) := \dfrac{d(v, w)}{1 + d(v, w)}$ también es una distancia.

   [Sug.: Considerar la función monótona creciente $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$.]
   Observar que la distancia D tiene la propiedad que $D(v, w) < 1$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.

   c) Para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$ se define la bola con centro p y radio r con respecto a la distancia D de la manera natural:

$$B_D(p, r) := \{x \in \mathbb{R}^n / D(x, p) < r\} \,.$$

   ¿Qué subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es $B_D(p, 1)$? ¿Y $B_D(p, 2)$? Observar entonces que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es acotado para esta distancia.

d) Supongamos ahora que d es la distancia usual en $\mathbb{R}^2$ y D es la distancia definida en (b).

1) Dibujar la bola $B_D((0,0),\frac{1}{2})$.

2) Demostrar que si $p \in \mathbb{R}^n$, entonces para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$B(p, r_1) \subseteq B_D(p, \varepsilon) \quad \text{y} \qquad B_D(p, r_2) \subseteq B(p, \varepsilon)$$

donde $B(p, r)$ denota la bola canónica de centro p y radio r (es decir, la bola para la distancia usual).

Esto muestra en particular que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es abierto para la distancia euclídea usual si y sólo si es abierto para la distancia D, a pesar de que todo conjunto es acotado con ésta última.

3. Estudiar cuáles propiedades (abierto, cerrado, acotado) verifica cada uno de los conjuntos siguientes:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1\}$ (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$ (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$

(e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy > z\}$

4. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar las propiedades siguientes:

a) $S^\circ = \{p \in \mathbb{R}^n / \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(p, \varepsilon) \subseteq S\}$.

b) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.

c) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?

d) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?

e) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?

f) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?

g) $(\mathbb{R}^n - S)^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{S}$.

5. En cada uno de los siguientes casos hallar $S^\circ, \overline{S}$ y ∂S.

(a) $S = [0, 1]$ (b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ (c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$

(d) $S = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ (e) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (f) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

6. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

a) Demostrar que S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S.

b) Demostrar que S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que $p \in \partial S$ si y sólo si todo entorno de p contiene un punto en S y un punto que no está en S.

8. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

   a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del ejercicio 5.

   b) *Un punto $p \in S$ se llama <u>un punto aislado de S</u> si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que* $B(p, \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

9. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right), \text{con } n, m \in \mathbb{N} \right\}$. Hallar la clausura $\overline{S}$.

10. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

11. *Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se llama <u>conexo</u> si para todo par de conjuntos abiertos $G, H \subset \mathbb{R}^n$ tales que*

    - $S = (S \cap G) \cup (S \cap H)$
    - $S \cap G \cap H = \emptyset$

    vale que $S \subset G$ o $S \subset H$.

    a) Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es conexo. ¿Qué ocurre con $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$? ¿Y con $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$? Si le gusta pensar en esto puede ver que pasa con $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$... [Respuesta: es conexo, pero no lo consulte, espere a la guía que sigue.]

    b) ¿Es $\mathbb{R}$ conexo? (cf. ejercicio 10)

    c) Demostrar con cuidado que el intervalo $[0, 1]$ es conexo.

    d) Decidir si los conjuntos de los ejercicios 3 (a)-(d) son conexos o no (no es necesario demostrarlo en cada caso, es suficiente con tener fe).

    e) Demostrar que un conjunto abierto y conexo $S \subset \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad de que dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse mediante una línea poligonal totalmente contenida en S. [Sug.: Dado $p \in S$ arbitrario considere los conjuntos $G := \{x \in S$ / se unen a p con una poligonal contenida en $S\}$ y $H := S - G$.]

12. Sean A y B conjuntos conexos de $\mathbb{R}^2$. ¿Es $A \cap B$ necesariamente conexo? ¿Es $A \cup B$ necesariamente conexo? ¿Se le ocurre alguna condición adicional no trivial que garantice que $A \cup B$ sea conexo? Otra pregunta (más difícil): ¿porqué los conjuntos se llaman S y T en todo el resto de la práctica y en este ejercicio se llaman A y B?

13. Se realiza la siguiente construcción recursiva en $\mathbb{R}^2$: partiendo del origen, se dibuja una línea Γ_0 de una unidad hacia la derecha, desde el nuevo extremo de Γ_0 se dibuja otra línea Γ_1 de $1/2$

unidad hacia arriba, desde el nuevo extremo de Γ_1 se traza otra línea Γ_2 de 1/4 de unidad a la derecha, luego Γ_3 de 1/8 de unidad hacia arriba, Γ_4 de 1/16 de unidad a la derecha y así sucesivamente.

a) Estudiar la convergencia de la sucesión de vértices de esta "poligonal".

b) Hallar $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \Gamma_n}$.

14. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $\Im_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Demostrar que $(0,1) = \bigcup_{n\geq 2} \Im_n$. ¿Existe un conjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0,1) = \bigcup_{n\in\mathcal{F}} \Im_n$? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0,1)$?

15. Sea $U_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \parallel (x,y) - (0,n) \parallel < n\}$. Demostrar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.

16. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que S es un conjunto compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

17. Sean $S, T \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

18. *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}^n$. Se define la distancia entre p y S de la forma siguiente:*

$$d(p,S) := \text{ínf}\{\parallel p - x \parallel / x \in S\}.$$

a) Demostrar que $|d(p,S) - d(q,S)| \leq d(p,q)$ para todo $p, q \in \mathbb{R}^n$.

b) Hallar todos los $p \in \mathbb{R}^n$ tales que $d(p,S) = 0$.

c) Demostrar que si S es cerrado la distancia entre un punto p y el conjunto S se realiza, es decir, existe $q \in S$ tal que $d(p,S) = \parallel p - q \parallel$.

d) Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ y sea $G = \{v \in \mathbb{R}^n / d(v,S) < \varepsilon\}$. Demostrar que G es abierto.

19. *Sean $S, T \subset \mathbb{R}^n$. Se define la distancia entre S y T de la manera siguiente:*

$$d(S,T) = \text{ínf}\{\parallel x - y \parallel / x \in S, y \in T\}.$$

a) ¿Es cierto que $d(S,T) = \text{ínf}\{d(p,T) \;/\; p \in S\}$?

b) Mostrar que no necesariamente siempre existen $p \in S$ y $q \in T$ tales que $d(S,T) = \parallel p - q \parallel$ (cf. ejercicio 18 parte (b)).

c) ¿Qué ocurre con la pregunta anterior si S y T son compactos? ¿Y si los dos son cerrados? ¿Y si uno es compacto y el otro cerrado no acotado? ¿Y si?

20. Sea $S = \left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \;/\; n, m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ (cf. ejercicio 4 de la Práctica 1). Demostrar que los puntos de acumulación de S son los puntos de la forma $\dfrac{1}{n}$ y el 0. ¿El conjunto $S \cup \{0\}$ es compacto?