

## Práctica No. 2

(1) Una función  $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  se llama una norma en  $\mathbb{R}^n$  si se cumple que:

- $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = (0, \dots, 0)$ .
- $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$  para todo  $v, w \in \mathbb{R}^n$ .

Sean

$$\| (x_1, \dots, x_n) \|_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$
$$\| (x_1, \dots, x_n) \|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Demostrar que las funciones  $\| \cdot \|_1$  y  $\| \cdot \|_\infty$  son normas.

(2) Una función  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  se llama una distancia en  $\mathbb{R}^n$  si se cumple que:

- $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$ .
- $d(v, w) = d(w, v)$ , para todo  $v, w \in \mathbb{R}^n$ .
- $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$ , para todo  $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ .

(a) Demostrar que si  $N$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $d(v, w) := N(v - w)$  es una distancia en  $\mathbb{R}^n$ .

(b) Demostrar que si  $d$  es una distancia arbitraria en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $D(v, w) := \frac{d(v, w)}{1 + d(v, w)}$  también es una distancia.

[Sug.: Considerar la función monótona creciente  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ .]

Observar que la distancia  $D$  tiene la propiedad que  $D(v, w) < 1$  para todo  $v, w \in \mathbb{R}^n$ .

(c) Para cada punto  $p \in \mathbb{R}^n$  y  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  se define la bola con centro  $p$  y radio  $r$  con respecto a la distancia  $D$  de la manera natural:

$$B_D(p, r) := \{x \in \mathbb{R}^n / D(x, p) < r\}.$$

¿Que subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  es  $B_D(p, 1)$ ? ¿Y  $B_D(p, 2)$ ? Observar entonces que todo subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  es acotado para esta distancia.

(d) Supongamos ahora que  $d$  es la distancia usual en  $\mathbb{R}^2$  y  $D$  es la distancia definida en (b).

(i) Dibujar la bola  $B_D((0, 0), \frac{1}{2})$ .

(ii) Demostrar que si  $p \in \mathbb{R}^n$ , entonces para cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , existen  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  tales que

$$B(p, r_1) \subseteq B_D(p, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B_D(p, r_2) \subseteq B(p, \varepsilon)$$

donde  $B(p, r)$  denota la bola canónica de centro  $p$  y radio  $r$  (es decir, la bola para la distancia usual).

Esto muestra en particular que un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  es abierto para la distancia euclídea usual si y sólo si es abierto para la distancia  $D$ , a pesar de que todo conjunto es acotado con la ésta última.

(3) Estudiar cuáles propiedades (abierto, cerrado, acotado) verifica cada uno de los conjuntos siguientes:

- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 1\}$       (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x = y\}$   
 (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/xy > 0\}$       (d)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$   
 (e)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/xy > z\}$

(4) Sean  $S, T$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Demostrar las propiedades siguientes:

- (a)  $S^\circ = \{p \in \mathbb{R}^n/\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(p, \varepsilon) \subseteq S\}$ .  
 (b) Si  $S \subseteq T$  entonces  $S^\circ \subseteq T^\circ$ .  
 (c)  $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$ . ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?  
 (d)  $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$ . ¿Vale la igualdad?  
 (e)  $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$ . ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?  
 (f)  $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$ . ¿Vale la igualdad?  
 (g)  $(\mathbb{R}^n - S)^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{S}$ .

(5) En cada uno de los siguientes casos hallar  $S^\circ, \overline{S}$  y  $\partial S$ .

- (a)  $S = [0, 1]$       (b)  $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$       (c)  $S = [-1, 0) \cup \{1\}$   
 (d)  $S = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$       (e)  $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$       (f)  $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

(6) Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ .

- (a) Demostrar que  $S$  es abierto si y solo si es disjunto con  $\partial S$ .  
 (b) Demostrar que  $S$  es cerrado si y solo si  $\partial S \subset S$ .

(7) Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ , demostrar que  $p \in \partial S$  si y sólo si todo entorno de  $p$  contiene un punto en  $S$  y un punto que no está en  $S$ .

(8) Si  $S \subset \mathbb{R}^n$  notamos con  $S'$  al conjunto de todos los puntos de acumulación de  $S$ .

- (a) Hallar  $S'$  para cada uno de los conjuntos del ejercicio 5.  
 (b) Un punto  $p \in S$  se llama un punto aislado de  $S$  si y sólo si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \cap S = \{p\}$ . Demostrar que  $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$ .

(9) Hallar los puntos de acumulación del conjunto  $S = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}), \text{ con } n, m \in \mathbb{N}\}$ . Hallar la adherencia  $\overline{S}$ .

(10) Hallar todos los subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$  que son a la vez abiertos y cerrados.

(11) Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  se llama conexo si para todo par de conjuntos abiertos  $G, H \subset \mathbb{R}^n$  tales que

- $S = (S \cap G) \cup (S \cap H)$
  - $S \cap G \cap H = \emptyset$
- vale que  $S \subset G$  o  $S \subset H$ .

- (a) Mostrar que  $\mathbb{Q}$  no es conexo. ¿Qué ocurre con  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ? ¿Y con  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ? Si le gusta pensar en esto puede ver que pasa con  $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ ... [Respuesta: es conexo, pero no lo consulte, espere a la guía que sigue.]  
 (b) ¿Es  $\mathbb{R}$  conexo? (cf. ejercicio 10)  
 (c) Demostrar con cuidado que el intervalo  $[0, 1]$  es conexo.  
 (d) Decidir si los conjuntos de los ejercicios 3 (a)-(d) son conexos o no (no lo demuestre en cada caso, pero por lo menos logre convencerse a sí mismo).

- (e) Demostrar que un conjunto abierto y conexo  $S \subset \mathbb{R}^2$  tiene la propiedad de que dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse mediante una línea poligonal totalmente contenida en  $S$ . [Sug.: Dado  $p \in S$  arbitrario considere los conjuntos  $G := \{x \in S / \text{se unen a } p \text{ con una poligonal contenida en } S\}$  y  $H := S - G$ .]
- (12) Sean  $A$  y  $B$  conjuntos conexos de  $\mathbb{R}^2$ . ¿Es  $A \cap B$  necesariamente conexo? ¿Es  $A \cup B$  necesariamente conexo? ¿Se le ocurre alguna condición adicional no trivial que garantice que  $A \cup B$  sea conexo? Otra pregunta (más difícil): ¿porqué los conjuntos se llaman  $S$  y  $T$  en todo el resto de la práctica y en este ejercicio se llaman  $A$  y  $B$ ?
- (13) Se realiza la siguiente construcción recursiva en  $\mathbb{R}^2$ : partiendo del origen, se dibuja una línea  $\Gamma_0$  de una unidad hacia la derecha, desde el nuevo extremo de  $\Gamma_0$  se dibuja otra línea  $\Gamma_1$  de  $1/2$  unidad hacia arriba, desde el nuevo extremo de  $\Gamma_1$  se traza otra línea  $\Gamma_2$  de  $1/4$  de unidad a la derecha, luego  $\Gamma_3$  de  $1/8$  de unidad hacia arriba,  $\Gamma_4$  de  $1/16$  de unidad a la derecha y así sucesivamente.
- (a) Estudiar la convergencia de la sucesión de vértices de esta “poligonal”.
- (b) Hallar  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma_n$ .
- (14) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , se considera el intervalo abierto  $\mathfrak{S}_n := (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$ . Demostrar que  $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{S}_n$ . ¿Existe un conjunto finito  $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$  tal que  $(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathcal{F}} \mathfrak{S}_n$ ? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto  $(0, 1)$ ?
- (15) Sea  $U_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (0, n)\| < n\}$ . Demostrar que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  es el semiplano superior abierto.
- (16) Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ , demostrar que  $S$  es un conjunto compacto si y sólo si toda sucesión contenida en  $S$  contiene una subsucesión que converge a un punto de  $S$ .
- (17) Sean  $S, T \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos compactos. Demostrar que  $S \cup T$  y  $S \cap T$  son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?
- (18) Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  y  $p \in \mathbb{R}^n$ . Se define la distancia entre  $p$  y  $S$  de la forma siguiente:

$$d(p, S) := \inf\{\|p - x\| / x \in S\}.$$

- (a) Demostrar que  $|d(p, S) - d(q, S)| \leq d(p, q)$  para todo  $p, q \in \mathbb{R}^n$ .
- (b) Hallar todos los  $p \in \mathbb{R}^n$  tales que  $d(p, S) = 0$ .
- (c) Demostrar que si  $S$  es cerrado la distancia entre un punto  $p$  y el conjunto  $S$  se realiza, es decir, existe  $q \in S$  tal que  $d(p, S) = \|p - q\|$ .
- (d) Sea  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  y sea  $G = \{v \in \mathbb{R}^n / d(v, S) < \varepsilon\}$ . Demostrar que  $G$  es abierto.
- (19) Sean  $S, T \subset \mathbb{R}^n$ . Se define la distancia entre  $S$  y  $T$  de la manera siguiente:

$$d(S, T) = \inf\{\|x - y\| / x \in S, y \in T\}.$$

- (a) ¿Es cierto que  $d(S, T) = \inf\{d(p, T) / p \in S\}$ ?
- (b) Mostrar que no necesariamente siempre existen  $p \in S$  y  $q \in T$  tales que  $d(S, T) = \|p - q\|$  (cf. ejercicio 18 parte (b)).
- (c) ¿Qué ocurre con la pregunta anterior si  $S$  y  $T$  son compactos? ¿Y si los dos son cerrados? ¿Y si uno es compacto y el otro cerrado no acotado? ¿Y si?

- (20) Sea  $S = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} / n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$  (cf. ejercicio 4 de la Práctica 1).  
Demostrar que los puntos de acumulación de  $S$  son los puntos de la forma  $\frac{1}{n}$  y el 0. ¿El conjunto  $S \cup \{0\}$  es compacto?